Warsztaty metod fizyki teoretycznej

zestaw I - reprezentacje algebr Liego

Mateusz Iskrzyński

16 marca 2011

1 Wstęp

W fizyce teoretycznej ogromne znaczenie ma analiza symetrii układu. Na fundamentalnym poziomie jest kluczowym elementem konstrukcji modeli fizycznych - niezależnych od wyboru układu odniesienia, a więc np. niezmienniczych względem transformacji Lorentza (Poincare), czy dyfeomorfizmów między układami współrzędnych (Ogólna Teoria Względności). Służy również do radykalnego uproszczenia szczegółowego zagadnienia, nieraz niezbędnego do znalezienia jego rozwiązania (znowu doskonałym przykładem są równania Einsteina Ogólnej Teorii Względności i ich wysokosymetryczne rozwiązanie Schwarzschilda) [1].

W czasie pierwszych zajęć zajmujemy się kilkoma matematycznymi aspektami istotnymi w kontekście problemów pierwszego z wymienionych rodzajów. Niezmienniczość teorii względem przekształceń pewnej symetrii oznacza zachowywanie definiującego ją działania przez odpowiednie reprezentacje rozważanej grupy symetrii, zwykle - pewnej zwartej grupy Liego. W przypadku konstrukcji modeli fizycznych szczególne znaczenie posiadają również pytania:

- *Względem jakiej reprezentacji transformują się podstawowe obiekty naszej teorii?* Np. pole elektromagnetyczne, stany opisujące cząstkę o określonym pędzie w kwantowej teorii pola, operatory w teorii kwantowej.

- *Jak konstruować modele - w jaki sposób można zbudować niezmiennicze działanie z w/w "cegiełek"?*

[1] "Es ist immer angenehm, über strenge Lösungen einfacher Form zu verfügen." ("zawsze miło jest mieć do dyspozycji ścisłe rozwiązania o prostej formie") Karl Schwarzschild, 1916

2 Narzędzia

Wygodnie jest analizować niezmienniczość obiektów ze względu na działanie reprezentacji algebry Liego generującej przekształcenia danego typu. W przypadku niektórych zagadnień rozważa się jedynie strukturę algebraiczną przy braku opisu za pomocą grupy (np. supersymetria posługuje się pewnym uogólnieniem koncepcji algebry Liego).

Algebra Liego nad ciałem K to przestrzeń wektorowa X nad ciałem K z dwuliniowym, antysymetrycznym działaniem $[\cdot,\cdot] : X \times X \to X$, zw. nawiasem Liego (lub komutatorem), spełniającym dla dowolnych $x, y, z \in X$ tożsamość Jacobiego:

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0$$

Dla algebr macierzowych komutator jest dany przez

$$[M,N] = MN - NM$$

Reprezentacja ρ algebry Liego A to odwzorowanie $\rho : A \to gl(V)$, będące homomorfizmem algebr A i endomorfizmów V (odwzorowań liniowych przestrzeni V w siebie), czyli spełniające:

$$\rho_{[x,y]} = [\rho_x, \rho_y] = \rho_x\rho_y - \rho_y\rho_x$$

Reprezentację nazywa się nieprzywiedlną (nieredukowalną), jeśli jedyne podprzestrzenie zachowywane przez działanie algebry to $\{0\}$ i V. Wymiar reprezentacji to wymiar przestrzeni na której działa.

Dwie reprezentacje ρ_1 w V_1, ρ_2 w V_2 nazywa się równoważnymi, jeśli istnieje odwzorowanie liniowe odwracalne $\phi : V_1 \to V_2$ takie, że $\rho_1 = \phi^{-1}\rho_2\phi$.

3 Żargon/inne definicje

Bardzo często reprezentacjami nazywa się również elementy przestrzeni na której działa odpowiednia reprezentacja rozważanej struktury, np. mówi się, że spinory Weyla należą do reprezentacji $(0, \frac{1}{2})$ grupy Lorentza.

W fizyce bardzo często oznacza się reprezentację poprzez jej wymiar (w przypadku reprezentacji $sl(2,\mathbb{C})$ jest to jednoznaczne z dokładnością do równoważności, w przypadku reprezentacji $su(n)$ mogą istnieć nierównoważne sprzężone reprezentacje, oznaczane n i $\bar{n}$, np. 3 i $\bar{3}$ grupy su(3).

W fizyce algebrą $u(n)$ nazywa się algebrę macierzy hermitowskich, w matematyce - antyhermitowskich, związane jest to z konwencją zadawania odwzorowania exp wiążącego algebrę Liego z jej grupą: $exp(itA)$ vs. $exp(tA)$, fizyczne generatory są czysto urojone, stąd np. $\hat{p_x} = -i\delta_x$.

4 Lematy

1. Skompleksyfikowana rzeczywista algebra Liego A, oznaczana $A_{\mathbb{C}}$ to przestrzeń elementów postaci $a_1 + ia_2$ gdzie $a_1, a_2 \in A$.

   Działanie algebry A w sposób jednoznaczny rozszerza się do działania na skompleksyfikowanej algebrze $A_{\mathbb{C}}$.

2. Podobnie zespolone skończenie wymiarowe reprezentacje ρ algebry A posiadają jednoznaczne rozszerzenia do zespolonych reprezentacji $\rho_{\mathbb{C}}$ algebry $A_{\mathbb{C}}$. Co więcej, $\rho_{\mathbb{C}}$ jest nieprzywiedlna wtedy i tylko wtedy, gdy ρ jest nieprzywiedlna.

3. Algebra $u(n)_{\mathbb{C}} = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) : A^\dagger = A\}_{\mathbb{C}}$ jest izomorficzna z algebrą $gl(n, \mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})\}$ (zdefiniowaną nad ciałem liczb zespolonych).

5 Pewien popularny trick

Dodawaliście kiedyś spin do orbitalnego momentu pędu elektronu w atomie wodoru? Dlaczego $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 + 1$? (inaczej: $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$)

1. Rozważmy algebrę Liego A generowaną przez trzy elementy: A_+, A_-, H z nawiasem Liego zadanym relacjami:

$$[A_+, A_-] = H \tag{1}$$
$$[H, A_\pm] = \pm 2A_\pm \tag{2}$$

   Wykaż za pomocą konstrukcji, że dla każdej liczby naturalnej m istnieje reprezentacja nieprzywiedlna A o wymiarze (m+1). Każde dwie nieprzywiedlne reprezentacje A o tym samym wymiarze są równoważne. *Wsk. spróbuj skonstruować bazę złożoną z wektorów własnych H*

2. Powyższe twierdzenie stosuje się do algebry $sl(2, \mathbb{C})$. Znajdź bazę realizującą wskazane relacje komutacyjne.

3. Lematy pozwalają teraz znaleźć reprezentacje algebry $su(2)$, można też jednak jawnie znaleźć bazę $su(2)_{\mathbb{C}}$ która spełnia powyższe relacje komutacyjne wychodząc od macierzy Pauliego $\sigma_i, i = 1..3$ jako bazy $su(2)$:

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k$$

   .

4. Generatory właściwej ortochronicznej podgrupy grupy Lorentza (czyli jej spójnej składowej zawierającej odwzorowanie tożsamościowe, ta podgrupa uzupełniona przez odwrócenie czasu T i odbicie przestrzenne P odtwarza całą grupę) $J_i, i = 1..3$ i $K_l, l = 1..3$ spełniają relacje komutacyjne:

$$[J_i, J_k] = i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{3}$$

$$[J_i, K_l] = i\varepsilon_{ilm}K_m \tag{4}$$

$$[K_i, K_j] = -i\varepsilon_{ijk}J_k \tag{5}$$

(zwykle K to generatory boostów, J to generatory obrotów).

Sklasyfikuj reprezentacje algebry Liego właściwej ortochronicznej podgrupy grupy Lorentza, identyfikowane przez podanie dwóch "spinów": (j,j'), np. $(\frac{1}{2}, 0)$ to lewe spinory Weyla.

5. Wykorzystując konstrukcję bazy reprezentacji w pkt. 1 dowiedź rozkładu iloczynu tensorowego reprezentacji algebry $sl(2, \mathbb{C})$. Niech V_k oznacza reprezentację o wymiarze $k+1$. Rozważając $V_m \otimes V_n$ jako reprezentację $sl(2, \mathbb{C})$ mamy:

$$V_m \otimes V_n = V_{m+n} \oplus V_{m+n-2} \oplus ... \oplus V_{|m-n|}$$

(gdyby indeks oznaczał 'spin' to rozkład miałby postać: $V_s \otimes V_{s'} = V_{s+s'} \oplus V_{s+s'-1} \oplus ... \oplus V_{|s-s'|}$)

6. Powiąż sklasyfikowane powyżej reprezentacje z grupą obrotów przestrzeni trójwymiarowej $SO(3) = \{M_{n\times n} : M^{-1}M = \mathbb{I} \wedge detM = 1\}$- jej reprezentacje powinny opisywać stany posiadające pewien przestrzenny wektor podlegający obrotowi, czyli wykaż izomorfizm algebr $so(3)$ i $su(2)$.