Kwantowe błądzenia losowe

Marcin Kotowski
marcin.kotowski1@gmail.com

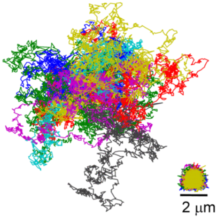
K MISMaP, Uniwersystet Warszawski
Studenckie Koło Fizyki UW (SKFiz UW)

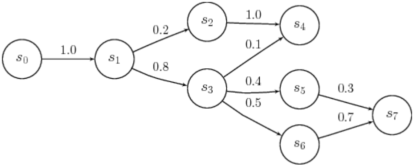
23 kwietnia 2010

Spis treści

Błądzenia losowe w przyrodzie

„Klasyczne” błądzenia losowe pojawiają się w fizyce bardzo często.





Błądzenia z czasem ciągłym...

... i dyskretnym

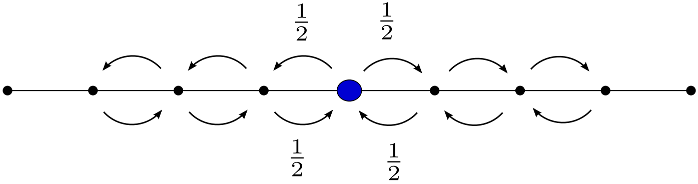
Błądzenia losowe w przyrodzie

Przykłady zjawisk, w których występują błądzenia losowe/łańcuchy Markowa:

- dyfuzja
- modelowanie sieci (np. Internet)
- ale także: kwantowa teoria pola
- ...

Błądzenie losowe na prostej

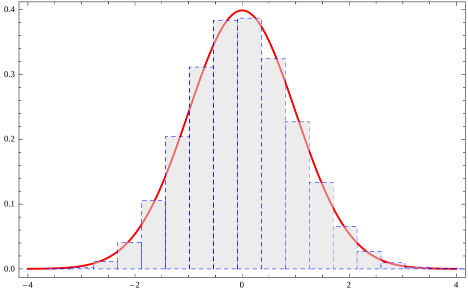
- zaczynamy z ustalonego punktu (np. 0)
- w każdym kroku rzucamy monetą - jeśli wypadnie orzeł, idziemy w lewo
- jeśli reszka w prawo



- po N krokach mamy rozkład prawdopodobieństwa na prostej ($\mathbb{P}(x)$ - prawdopodobieństwo, że w N-tym kroku jesteśmy w punkcie x)

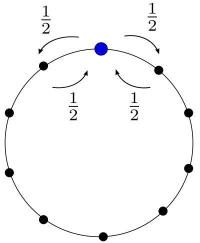
Błądzenie losowe na prostej - c.d.

- rozkład na prostej zbiega z $N \to \infty$ do rozkładu gaussowskiego (po unormowaniu)



Błądzenie na grafie

- sytuacja jak poprzednio, tylko na skończonym grafie
- np. okrąg złożony z N punktów, w każdym kroku idziemy w lewo lub w prawo



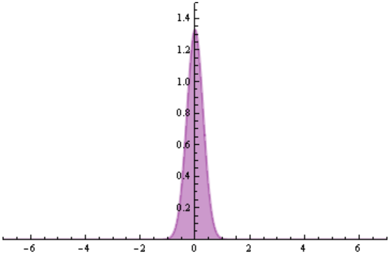
- na ogólnym grafie - z każdego wierzchołka możemy iść w d kierunkach (z jednorodnym prawdopodobieństwem)

Błądzenie na prostej - kwantowo

Jak „skwantować” błądzenie losowe na prostej?

Błądzenie na prostej - kwantowo

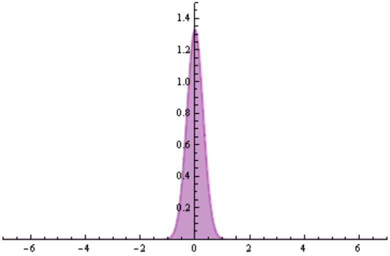
Jak „skwantować” błądzenie losowe na prostej?



- cząstka kwantowa na prostej, dyskretny zbiór pozycji: $x_0, x_0 \pm 1, x_0 \pm 2, \cdots$
- stany: $|\psi_{x_0}\rangle, |\psi_{x_0 \pm 1}\rangle, \ldots$

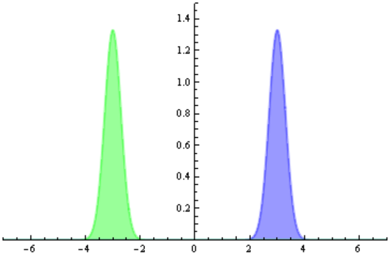
Błądzenie na prostej - kwantowo

Jak „skwantować" błądzenie losowe na prostej?



- cząstka kwantowa na prostej, dyskretny zbiór pozycji: $x_0, x_0 \pm 1, x_0 \pm 2, \cdots$
- stany: $|\psi_{x_0}\rangle, |\psi_{x_0 \pm 1}\rangle, \ldots$
- dodatkowo spin: $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$

Błądzenie na prostej - kwantowo



- operacja S - przesunięcie zależne od spinu:

$$S|\psi_x\rangle \otimes |\uparrow\rangle = |\psi_{x+1}\rangle \otimes |\uparrow\rangle$$

$$S|\psi_x\rangle \otimes |\downarrow\rangle = |\psi_{x-1}\rangle \otimes |\downarrow\rangle$$

Błądzenie na prostej - kwantowo

- początkowo: $|\psi_0\rangle = |\psi_{x_0}\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)$
- $S\ |\psi_{x_0}\rangle \otimes (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) = |\psi_{x_0+1}\rangle \otimes \alpha|\uparrow\rangle + |\psi_{x_0-1}\rangle \otimes \beta|\downarrow\rangle$
- możemy zrobić pomiar położenia - z prawdopobieństwem $|\alpha|^2$ idziemy w prawo, z $|\beta|^2$ - w lewo (czyli jak klasyczne błądzenie)...

Błądzenie na prostej - kwantowo

- tutaj nic ciekawego... (spiny się separują)

Błądzenie na prostej - kwantowo

- tutaj nic ciekawego... (spiny się separują)
- trick - przed przesunięciem S wykonujemy obrót spinu
- np. macierz obrotu

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Błądzenie na prostej - kwantowo

- tutaj nic ciekawego... (spiny się separują)
- trick - przed przesunięciem S wykonujemy obrót spinu
- np. macierz obrotu

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $|\psi_x\rangle \otimes |\uparrow\rangle \rightarrow |\psi_x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$
- $|\psi_x\rangle \otimes |\downarrow\rangle \rightarrow |\psi_x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$

Błądzenie na prostej - kwantowo

- tutaj nic ciekawego... (spiny się separują)
- trick - przed przesunięciem S wykonujemy obrót spinu
- np. macierz obrotu

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- $|\psi_x\rangle \otimes |\uparrow\rangle \rightarrow |\psi_x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$
- $|\psi_x\rangle \otimes |\downarrow\rangle \rightarrow |\psi_x\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$
- nie robimy pomiaru - niech kolejne kroki interferują

Błądzenie na prostej - kwantowo

- pierwszy krok:

$$S(Id \otimes H)|\psi_0\rangle =$$

$$|\psi_{x_0+1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)|\uparrow\rangle + |\psi_{x_0-1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)|\downarrow\rangle$$

Błądzenie na prostej - kwantowo

- pierwszy krok:

$$S(Id \otimes H)|\psi_0\rangle =$$

$$|\psi_{x_0+1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha + \beta)|\uparrow\rangle + |\psi_{x_0-1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha - \beta)|\downarrow\rangle$$

- drugi krok:

$$(S(Id \otimes H))^2|\psi_0\rangle =$$

$$|\psi_{x_0+2}\rangle \otimes \frac{1}{2}(\alpha + \beta)|\uparrow\rangle + |\psi_{x_0}\rangle \otimes \frac{1}{2}((\alpha + \beta)|\uparrow\rangle$$

$$+ (\alpha - \beta)|\downarrow\rangle) + |\psi_{x_0-2}\rangle \otimes \frac{1}{2}(\alpha - \beta)|\downarrow\rangle$$

Błądzenie na prostej - kwantowo

- pierwszy krok:

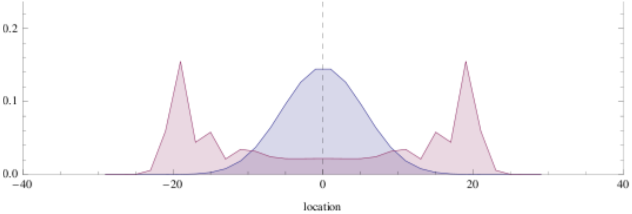
$$S(Id \otimes H)|\psi_0\rangle =$$
$$|\psi_{x_0+1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha+\beta)|\uparrow\rangle + |\psi_{x_0-1}\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha-\beta)|\downarrow\rangle$$

- drugi krok:

$$(S(Id \otimes H))^2|\psi_0\rangle =$$
$$|\psi_{x_0+2}\rangle \otimes \frac{1}{2}(\alpha+\beta)|\uparrow\rangle + |\psi_{x_0}\rangle \otimes \frac{1}{2}((\alpha+\beta)|\uparrow\rangle$$
$$+(\alpha-\beta)|\downarrow\rangle) + |\psi_{x_0-2}\rangle \otimes \frac{1}{2}(\alpha-\beta)|\downarrow\rangle$$

- w końcu po N krokach robimy pomiar - jaki rozkład dostaniemy?

Błądzenie na prostej - kwantowo



- ścieżki do zera się kasują (destruktywna interferencja)
- zupełnie co innego, niż klasycznie!

Błądzenie na prostej - kwantowo

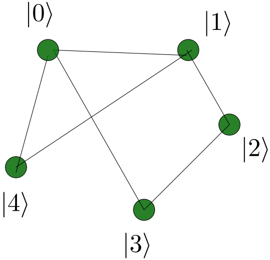
- ścieżki do zera się kasują (destruktywna interferencja)
- zupełnie co innego, niż klasycznie!
- klasycznie - średnia odległość po N krokach: $\sim \sqrt{N}$

Błądzenie na prostej - kwantowo

- ścieżki do zera się kasują (destruktywna interferencja)
- zupełnie co innego, niż klasycznie!
- klasycznie - średnia odległość po N krokach: $\sim \sqrt{N}$
- kwantowo - średnia odległość po N krokach: $\sim N$
- kwantowe błądzenie „rozpływa się” kwadratowo szybciej!

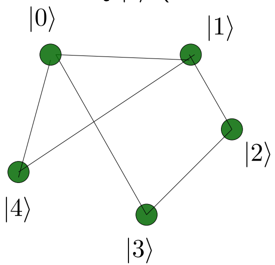
Definicja ogólna

- przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ z bazą $|i\rangle$ (wierzchołki)



Definicja ogólna

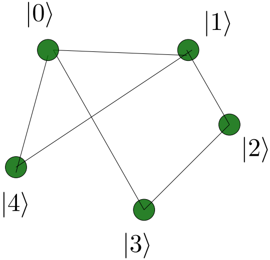
- przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ z bazą $|i\rangle$ (wierzchołki)



- do tego przestrzeń „monety" $\mathcal{H}_C$ - na prostej albo okręgu spin $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$
- na ogólnym grafie - moneta d-wymiarowa $|1\rangle, \ldots, |d\rangle$ (tyle, ile krawędzi)

Definicja ogólna

- przestrzeń Hilberta $\mathcal{H}$ z bazą $|i\rangle$ (wierzchołki)



- do tego przestrzeń „monety" $\mathcal{H}_C$ - na prostej albo okręgu spin $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$
- na ogólnym grafie - moneta d-wymiarowa $|1\rangle, \ldots, |d\rangle$ (tyle, ile krawędzi)
- pojedynczy krok - warunkowe przesunięcie S (j.w.) + operacja unitarna w $\mathcal{C}$ („obrót monety")

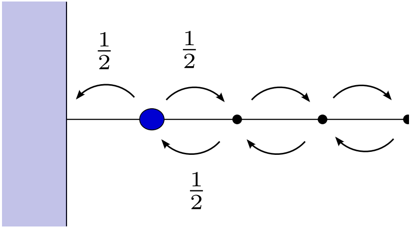
Błądzenie z pochłanianiem

Co jeszcze ciekawego może się wydarzyć?

Błądzenie z pochłanianiem

Co jeszcze ciekawego może się wydarzyć?

- błądzenie z barierą pochłaniającą



Błądzenie z pochłanianiem

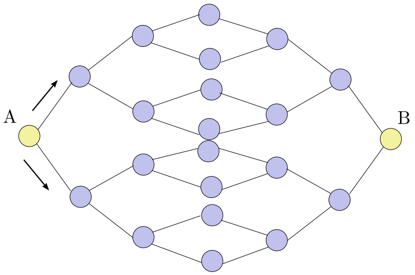
- klasycznie - z prawdopodobieństwem 1 w końcu trafimy w barierę

Błądzenie z pochłanianiem

- klasycznie - z prawdopodobieństwem 1 w końcu trafimy w barierę
- kwantowo zawsze uciekniemy! (z prawdopodobieństwem $p = \frac{2}{\pi} \sim 0.636...$)

Szybkość przemieszczania się

Jak szybko można dostać się z jednego wierzchołka do drugiego?



- dwa zlepione drzewa, 2^n wierzchołków
- chodzimy losowo

Szybkość przemieszczania się

- klasycznie - prawdopodobieństwo dojścia z A do B w N krokach - $\frac{1}{2^N}$

Szybkość przemieszczania się

- klasycznie - prawdopodobieństwo dojścia z A do B w N krokach - $\frac{1}{2^N}$
- kwantowo - $\frac{1}{\sqrt{N}}$! (wykładniczo lepiej)

Szybkość przemieszczania się

- klasycznie - prawdopodobieństwo dojścia z A do B w N krokach - $\frac{1}{2^N}$
- kwantowo - $\frac{1}{\sqrt{N}}$! (wykładniczo lepiej)
- żeby dojść z A do B np. z prawdopodobieństwem $\sim \frac{1}{2}$, klasycznie trzeba rzędu 2^N prób, kwantowo - tylko $\sqrt{N}$

Szybkość przemieszczania się

- klasycznie - prawdopodobieństwo dojścia z A do B w N krokach - $\frac{1}{2^N}$
- kwantowo - $\frac{1}{\sqrt{N}}$! (wykładniczo lepiej)
- żeby dojść z A do B np. z prawdopodobieństwem $\sim \frac{1}{2}$, klasycznie trzeba rzędu 2^N prób, kwantowo - tylko $\sqrt{N}$
- zazwyczaj niestety nie jest wykładniczo lepiej, co najwyżej kwadratowo
- ale to też dobrze

Wyszukiwanie

- jak wykorzystać kwantowe błądzenia obliczeniowo?

Wyszukiwanie

- jak wykorzystać kwantowe błądzenia obliczeniowo?
- problem wyszukiwania elementu - dane $x_1, \ldots, x_N$, znaleźć wśród nich wyróżniony element
- klasycznie - $O(N)$ sprawdzeń

Wyszukiwanie

- jak wykorzystać kwantowe błądzenia obliczeniowo?
- problem wyszukiwania elementu - dane $x_1, \ldots, x_N$, znaleźć wśród nich wyróżniony element
- klasycznie - $O(N)$ sprawdzeń
- kwantowo - $O(\sqrt{N})$ (algorytm Grovera - klasyka gatunku)

Wyszukiwanie

- jak wykorzystać kwantowe błądzenia obliczeniowo?
- problem wyszukiwania elementu - dane $x_1, \ldots, x_N$, znaleźć wśród nich wyróżniony element
- klasycznie - $O(N)$ sprawdzeń
- kwantowo - $O(\sqrt{N})$ (algorytm Grovera - klasyka gatunku)
- da się sformułować jako kwantowe błądzenie losowe po pełnym grafie o wierzchołkach $x_1, \ldots, x_N$

Rozróżnianie elementów

Problem:

- dane elementy $x_1, \ldots, x_N \in A$
- pytamy, czy wszystkie x_i są różne
- ile potrzeba do tego porównań?

Rozróżnianie elementów

Problem:

- dane elementy $x_1, \ldots, x_N \in A$
- pytamy, czy wszystkie x_i są różne
- ile potrzeba do tego porównań?
- klasycznie - intuicyjne, że co najmniej rzędu N

Rozróżnianie elementów - c.d.

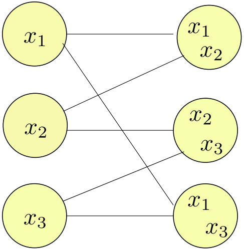
Kwantowo:

- algorytm przez błądzenie losowe po odpowiednio skonstruowanym grafie (Ambainis, 2006)

Rozróżnianie elementów - c.d.

Kwantowo:

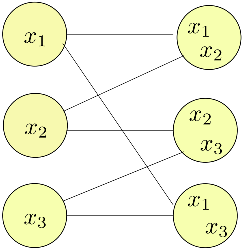
- algorytm przez błądzenie losowe po odpowiednio skonstruowanym grafie (Ambainis, 2006)
- wierzchołki grafu - podzbiory $\{x_1, \ldots, x_N\}$ (mniej więcej)



Rozróżnianie elementów - c.d.

Kwantowo:

- algorytm przez błądzenie losowe po odpowiednio skonstruowanym grafie (Ambainis, 2006)
- wierzchołki grafu - podzbiory $\{x_1, \ldots, x_N\}$ (mniej więcej)

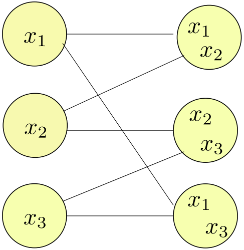


- odpalamy na tym błądzenie kwantowe

Rozróżnianie elementów - c.d.

Kwantowo:

- algorytm przez błądzenie losowe po odpowiednio skonstruowanym grafie (Ambainis, 2006)
- wierzchołki grafu - podzbiory $\{x_1, \ldots, x_N\}$ (mniej więcej)



- odpalamy na tym błądzenie kwantowe
- działa w $O(N^{\frac{2}{3}})$ porównań!

Inne problemy

Inne problemy z kwantowym przyspieszeniem:

- przemienność grupy (dana skończona grupa, sprawdzamy, czy jest przemienna)
- wyszukiwanie trójkątów w grafach
- weryfikacja macierzy (dane A, B, C, pytamy, czy $AB = C$)
- i inne

Inne problemy

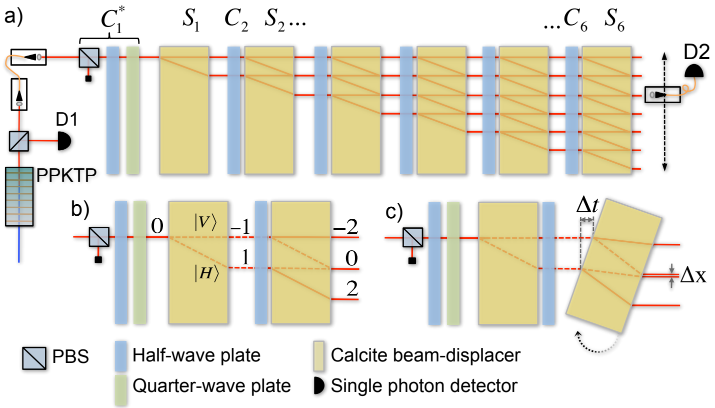
Inne problemy z kwantowym przyspieszeniem:

- przemienność grupy (dana skończona grupa, sprawdzamy, czy jest przemienna)
- wyszukiwanie trójkątów w grafach
- weryfikacja macierzy (dane A, B, C, pytamy, czy $AB = C$)
- i inne
- zazwyczaj przyspieszenie jest rzędu $\sqrt{N}$ lub podobnie

Implementacja

Jak fizycznie zaimplementować kwantowe błądzenie?

Błądzenie losowe via fotony



Konkluzje

- interesujące zjawisko różne od klasycznego

Konkluzje

- interesujące zjawisko różne od klasycznego
- dość świeża działka (prace sprzed 3-4 lat), można zbadać jeszcze dużo rzeczy

Nad czym można się zastanawiać:

Konkluzje

- interesujące zjawisko różne od klasycznego
- dość świeża działka (prace sprzed 3-4 lat), można zbadać jeszcze dużo rzeczy

Nad czym można się zastanawiać:

- wpływ dekoherencji (interpolacja klasyczne-kwantowe)

Konkluzje

- interesujące zjawisko różne od klasycznego
- dość świeża działka (prace sprzed 3-4 lat), można zbadać jeszcze dużo rzeczy

Nad czym można się zastanawiać:

- wpływ dekoherencji (interpolacja klasyczne-kwantowe)
- błądzenia z czasem ciągłym

Konkluzje

- interesujące zjawisko różne od klasycznego
- dość świeża działka (prace sprzed 3-4 lat), można zbadać jeszcze dużo rzeczy

Nad czym można się zastanawiać:

- wpływ dekoherencji (interpolacja klasyczne-kwantowe)
- błądzenia z czasem ciągłym
- skalowalna implementacja

Bibliografia

- Julia Kempe, „Quantum random walks - an introductory overview", 2003
- różne prace: A. Ambainis, A. Childs, M. Szegedy, M. Santha

Bibliografia

- Julia Kempe, „Quantum random walks - an introductory overview”, 2003
- różne prace: A. Ambainis, A. Childs, M. Szegedy, M. Santha

Dziękuję za uwagę!