# Układy Liego: teoria i zastosowania

Javier de Lucas Araujo

Katedra Metod Matematycznych w Fizyce

13 Marca 2014

# Przykłady zasad superpozycji I

Dla dowolnego układu równań różniczkowych jednorodnych liniowych, np.

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t)x^j, \qquad i = 1, \ldots, n,$$

rozwiązanie ogólne, $x(t)$, można zapisać w formie

$$x(t) = \sum_{j=1}^{n} k_j x_{(j)}(t),$$

gdzie $x_{(1)}(t), \ldots, x_{(n)}(t)$ to *fundamentalny układ rozwiązań* i $k_1, \ldots, k_n$ to zbiór stałych.

# Przykłady zasad superpozycji II

Podobnie, rozwiązanie ogólne, $x(t)$, dla każdego układu równań różniczkowych liniowych, np.

$$\frac{dx^i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a^i_j(t) x^j + b^i(t), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

można zapisać w postaci

$$x(t) = x_{(0)}(t) + \sum_{j=1}^{n} k_j (x_{(j)}(t) - x_{(0)}(t)),$$

gdzie $x_{(0)}(t), \ldots, x_{(n)}(t)$ to pewna rodzina rozwiązań układu i $k_1, \ldots, k_n$ to zbiór stałych.

# Przykłady zasad superpozycji III

Rozwiązanie ogólne dla dowolnego równania rózniczkowego Riccatiego, tj.

$$\frac{dx}{dt} = a(t) + b(t)x + c(t)x^2,$$

można zapisać w postaci

$$x(t) = \frac{x_{(1)}(t)(x_{(3)}(t) - x_{(2)}(t)) + kx_{(2)}(t)(x_{(3)}(t) - x_{(1)}(t))}{(x_{(3)}(t) - x_{(2)}(t)) + k(x_{(3)}(t) - x_{(1)}(t))},$$

gdzie $x_{(1)}(t), x_{(2)}(t), x_{(3)}(t)$ są trzema rozwiązaniami układu i $k$ to liczba rzeczywista.

# Charakterystyka układów posiadających zasady superpozycji

## Definicja

Mówimy, że układ równań różniczkowych posiada zasadę superpozycji kiedy jego ogólne rozwiązanie można zapisać w następujący sposób

$$x(t) = F(x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t); k).$$

gdzie $F : N^m \times N \to N$ to funkcja niezależna od czasu, tzw. zmienna $t$, $x_{(1)}(t), \ldots, x_{(m)}(t)$ to rodzina rozwiązań tego układu i $k$ to element rozmaitości $N$.

# Kilka wyników dotyczących teorii układów Liego


- L. Königsberger, *Über die einer beliebigen differentialgleichung erster Ordnung angehörigen selbst ändigen Transcendenten*, Acta Math. **3**, 1–48 (1883). (po niemiecku)
- M.E. Vessiot, *Sur une classe d'équations différentielles*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **10**, 53–64 (1893) i C.R. Math. Acad. Sci. Paris **116**, 959–961 (1893), (po francusku)
- M.S. Lie, *Allgemeine Untersuchungen über Differentialgleichungen, die eine continuirliche endliche Gruppe gestatten*, Math. Ann. **25**, 71–151 (1885). (po niemiecku). M.S. Lie i G. Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen mit geometrischen und anderen Anwendungen*, Teubner, Leipzig, 1893.
- J.F. Cariñena, J. Grabowski i G. Marmo, *Superposition rules, Lie theorem and partial differential equations*, Rep. Math. Phys. **60**, 237–258 (2007).
- D. Blázquez-Sanz and J.J. Morales-Ruiz, *Local and Global Aspects of Lie's Superposition Theorem*, J. Lie Theory **20**, 483–517 (2010).

# Algebra Liego

Algebra Liego to przestrzeń wektorowa $V$ wyposażona w nawias $[\cdot,\cdot] : V \times V \to V$, tzw Nawias Liego, spełniający następujące własności:

- Nawias jest dwu-liniowe, czyli

$$[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3] = \lambda_1 [v_1, v_3] + \lambda_2 [v_2, v_3],$$
$$[v_3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2] = \lambda_1 [v_3, v_1] + \lambda_2 [v_3, v_2],$$

  dla dowolnych $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ i $v_1, v_2, v_3 \in V$.
- Nawias jest antisymetryczny

$$[v_1, v_2] = -[v_2, v_1].$$

- Nawias spełnia tożsamość Jacobiego, czyli

$$[v_1, [v_2, v_3]] = [[v_1, v_2], v_3] + [v_2, [v_1, v_3]].$$

Przykłady:

- Zbiór $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ macierz kwadratowych $n \times n$ o współczynnikach rzeczywistych:

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \qquad A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Zbiór $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ macierz kwadratowych $n \times n$ bezśladowych o współczynnikach rzeczywistych z nawiasem Liego

$$[A, B] = A \cdot B - B \cdot A, \qquad A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

- Zbiór $\mathfrak{X}(N)$ pól wektorowych na rozmaitości $N$:

$$[D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1, \qquad D_1, D_2 \in \mathfrak{X}(N).$$

### Lie 1880

Każda algebra Liego skończonego wymiaru na $\mathbb{R}$ jest podalgebrą Liego algebry

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial x}, x^2\frac{\partial}{\partial x} \right\rangle \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

# GKO classification: Primitive Lie algebras

| # | Primitive | Basis of vector fields $X_i$ | Domain |
|---|---|---|---|
| $P_1$ | $A_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, \alpha(x\partial_x + y\partial_y) + y\partial_x - x\partial_y, \quad \alpha \geq 0$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $P_2$ | $\mathfrak{sl}(2)$ | $\{\partial_x, x\partial_x + y\partial_y\}, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y$ | $\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$ |
| $P_3$ | $\mathfrak{so}(3)$ | $\{y\partial_x - x\partial_y, (1 + x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y\}, 2xy\partial_x + (1 + y^2 - x^2)\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $P_4$ | $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $P_5$ | $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x - y\partial_y, y\partial_x, x\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $P_6$ | $\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $P_7$ | $\mathfrak{so}(3,1)$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + y\partial_y, y\partial_x - x\partial_y, (x^2 - y^2)\partial_x + 2xy\partial_y, 2xy\partial_x + (y^2 - x^2)\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $P_8$ | $\mathfrak{sl}(3)$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + xy\partial_y, xy\partial_x + y^2\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |

# GKO classification: Imprimitive Lie algebras

| # | Imprimitive | Basis of vector fields $X_i$ | Domain |
|---|---|---|---|
| $I_1$ | $\mathbb{R}$ | $\{\partial_x\}$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_2$ | $\mathfrak{h}_2$ | $\{\partial_x\}, x\partial_x$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_3$ | $\mathfrak{sl}(2)$ (type I) | $\{\partial_x\}, x\partial_x, x^2\partial_x$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_4$ | $\mathfrak{sl}(2)$ (type II) | $\{\partial_x + \partial_y, x\partial_x + y\partial_y\}, x^2\partial_x + y^2\partial_y$ | $\mathbb{R}^2_{x\neq y}$ |
| $I_5$ | $\mathfrak{sl}(2)$ (type III) | $\{\partial_x, 2x\partial_x + y\partial_y\}, x^2\partial_x + xy\partial_y$ | $\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$ |
| $I_6$ | $\mathfrak{gl}(2)$ (type I) | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, x^2\partial_x$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_7$ | $\mathfrak{gl}(2)$ (type II) | $\{\partial_x, y\partial_y\}, x\partial_x, x^2\partial_x + xy\partial_y$ | $\mathbb{R}^2_{y\neq 0}$ |
| $I_8$ | $B_\alpha \simeq \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + \alpha y\partial_y, \quad 0 < \lvert\alpha\rvert \leq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_9$ | $\mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{h}_2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{10}$ | $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{h}_2$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x$ | $\mathbb{R}^2$ |

# GKO classification: Imprimitive Lie algebras II

| # | Imprimitive | Basis of vector fields $X_i$ | Domain |
|---|---|---|---|
| $I_{11}$ | $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2)$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, y\partial_y, x^2\partial_x, y^2\partial_y$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{12}$ | $\mathbb{R}^{r+1}$ | $\{\partial_y\}, \xi_1(x)\partial_y, \ldots, \xi_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{13}$ | $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$ | $\{\partial_y\}, y\partial_y, \xi_1(x)\partial_y, \ldots, \xi_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{14}$ | $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r$ | $\{\partial_x, \eta_1(x)\partial_y\}, \eta_2(x)\partial_y, \ldots, \eta_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{15}$ | $\mathbb{R}^2 \ltimes \mathbb{R}^r$ | $\{\partial_x, y\partial_y\}, \eta_1(x)\partial_y, \ldots, \eta_r(x)\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{16}$ | $C_\alpha^r \simeq \mathfrak{h}_2 \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + \alpha y\partial y, x\partial_y, \ldots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{17}$ | $\mathbb{R} \ltimes (\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^r)$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x + (ry + x^r)\partial_y, x\partial_y, \ldots, x^{r-1}\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{18}$ | $(\mathfrak{h}_2 \oplus \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_y, \ldots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{19}$ | $\mathfrak{sl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_y, 2x\partial_x + ry\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \ldots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |
| $I_{20}$ | $\mathfrak{gl}(2) \ltimes \mathbb{R}^{r+1}$ | $\{\partial_x, \partial_y\}, x\partial_x, x\partial_y, y\partial_y, x^2\partial_x + rxy\partial_y, x^2\partial_y, \ldots, x^r\partial_y, \quad r \geq 1$ | $\mathbb{R}^2$ |

# Pola wektorowe zależne od czasu

Niech $\pi_2$ i $\pi$ będą rzutowaniami $\pi_2 : (t,x) \in \mathbb{R} \times N \mapsto x \in N$ i $\pi : (x,v) \in TN \mapsto x \in N$. Pole wektorowe zależne od czasu na rozmaitości $N$ to odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times N \to TN$, takie jak na poniższym diagramie, jest przemienne

$$\begin{tikzcd} & TN \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{R} \times N \arrow[ur, bend left, "X"] \arrow[r, "\pi_2"] & N \end{tikzcd}$$

$$\pi \circ X = \pi_2$$
$$\Downarrow$$
$$\pi(X(t,x)) = \pi_2(t,x) = x$$
$$\Downarrow$$
$$X(t,x) \in \pi^{-1}(x) = T_x N$$

Wówczas odwzorowania $X_t : x \in N \to X(t,x) \in TN$ są polami wektorowymi.

Pole wektorowe zależne od $t$ $X(t,x) \Longleftrightarrow$ pola wektorowe $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$

# Pola wektorowe zależne od czasu

Krzywą całkową pola wektorowego $X$ nad $N$ nazywamy funkcję $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times N$, taką, że

$$X(t, \gamma(t)) = \frac{d\pi \circ \gamma}{dt}.$$

Każdy układ w powyższym wzorze definiuje tylko jedno pole wektorowe i na odwrót.

$$X(t, x) \Longleftrightarrow \frac{dx^i}{dt} = X^i(t, x), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

# Twierdzenie Liego–Scheffera

Układ równań różniczkowych pierwszego rzędu

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(t,x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

posiada zasadę superpozycji, wtedy i tylko wtedy, gdy powiązane pole wektorowe zależne od czasu $X(t,x)$ można zapisać w następujący sposób

$$X(t,x) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha(x),$$

gdzie $X_1, \ldots, X_r$ to rodzina pól wektorowych generująca algebrę Liego skończonego wymiaru, tzw. algebrę Vessiota–Guldberga.

# Twierdzenie Liego–Scheffera i równania Riccatiego

Z każdym równaniem Riccatiego możemy powiązać pole wektorowe zależne od czasu

$$\frac{dx}{dt} = b_1(t) + b_2(t)x + b_3(t)x^2,$$

które można zapisać w następujący sposób

$$X(t, x) = b_1(t)X_1(x) + b_2(t)X_2(x) + b_3(t)X_3(x),$$

gdzie

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x^2\frac{\partial}{\partial x},$$

spełniają relacje komutacyjne

$$[X_1, X_2] = X_1, \quad [X_1, X_3] = 2X_2, \quad [X_2, X_3] = X_3.$$

Innymi słowami, pola wektorowe $X_1, X_2, X_3$ generują algebrę Liego skończonego wymiaru (właśnie $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$).

# Równania Kummera-Schwarza drugiego rzędu

Równaniami Kummera–Schwarza nazywamy równania różniczkowe takie jak

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{3}{2x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2b_0x^3 + a_0(t)x,$$

gdzie $b_0$ to liczba rzeczywista i $a_0(t)$ to dowolna funkcja zależna od czasu.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{3}{2}\dfrac{v^2}{x} - 2b_0x^3 + a_0(t)x, \end{cases}$$

# Równania Kummera-Schwarza drugiego rzędu

Powyższy układ jest powiązany z polem wektorowym

$$X_t = \left(\frac{3}{2}\frac{v^2}{x} - 2b_0x^3 + a_0(t)x\right)\frac{\partial}{\partial v} + v\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_2 + a_0(t)X_1),$$

gdzie

$$X_1 = \sqrt{2}x\frac{\partial}{\partial v}, X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} + 2v\frac{\partial}{\partial v}, \frac{X_2}{\sqrt{2}} = v\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{3}{2}\frac{v^2}{x} - 2b_0x^3\right)\frac{\partial}{\partial v},$$

spełniają relacje

$$[X_1, X_2] = 2X_3, \qquad [X_2, X_3] = -X_2, \qquad [X_1, X_3] = X_1.$$

Zatem $X(t, x)$ to układ Liego.

# Równania Kummera-Schwarza trzeciego rzędu

Równania Kummera–Schwarza trzeciego rzędu mają postacie

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{3}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - 2b_0\left(\frac{dx}{dt}\right)^3 + 2a_0(t)\frac{dx}{dt},$$

gdzie $b_0$ to liczba rzeczywista i $a_0(t)$ to dowolna funkcja zależna od czasu. Teraz, mamy

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y^{(1)}, \\ \dfrac{dy^{(1)}}{dt} = y^{(2)}, \\ \dfrac{dy^{(2)}}{dt} = \dfrac{3}{2}\dfrac{y^{(2)2}}{y^{(1)}} - 2b_0 y^{(1)3} + 2a_0(t) y^{(1)}. \end{cases}$$

# Równania Kummera-Schwarza trzeciego rzędu

To równanie jest powiązane z polem wektorowym

$$y^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+y^{(2)}\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}+ \\ + + \left(\frac{3}{2}\frac{y^{(2)2}}{y^{(1)}}-2b_0y^{(1)3}\right)\frac{\partial}{\partial y^{(2)}}+2a_0(t)y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y^{(2)}}. \quad (1)$$

Niech $X_1$, $X_2$, $X_3$ będą polami wektorowymi w formie

$$X_1=y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y^{(2)}},$$

$$X_2=y^{(1)}\frac{\partial}{\partial x}+y^{(2)}\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}+\left(\frac{3}{2}\frac{y^{(2)2}}{y^{(1)}}-2b_0y^{(1)3}\right)\frac{\partial}{\partial y^{(2)}},$$

$$X_3=y^{(1)}\frac{\partial}{\partial y^{(1)}}+2y^{(2)}\frac{\partial}{\partial y^{(2)}},$$

spełniającymi relacje komutacyjne:

$$[X_1, X_2] = X_3, \qquad [X_2, X_3] = -X_2, \qquad [X_1, X_3] = X_1.$$

Wówczas te pola wektorowe generują algebrę Liego, która jest izomorficzna z $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Ponadto, można zapisać

$$X_t = X_2 + 2a_0(t)X_1.$$

Innymi słowy, $X$ to układ Liego.

# Zastosowanie w mechanice klasycznej

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\omega^2(t)x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\omega^2(t)x + \dfrac{k}{x^3}, \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{dg}{dt} = R_{g*e}(\mathrm{a}(t))}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v, \\ \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{3}{2}\dfrac{v^2}{x} - 2b_0x^3 - \omega^2(t)x, \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = -1 + \omega^2(t).$$

Niech $(A, [,])$ będzie algebrą Liego, gdzie $[,] : A \times A \to A$ to nawias Liego i $\mathcal{B}$ podzbioru $A$, nazywamy przdłużeniem podzbioru $\mathcal{B}$ (względem zbioru $A$), czyli $\mathrm{Lie}(\mathcal{B}, A, [,])$, najmniejszej algebry Liego zawierającej $\mathcal{B}$.

## Lemat

Dla każdego podzbioru $\mathcal{B} \subset A$, jego przedłużenie jest generowane przez elementy zbioru

$$\mathcal{B}, [\mathcal{B}, \mathcal{B}], [\mathcal{B}, [\mathcal{B}, \mathcal{B}]], [\mathcal{B}, [\mathcal{B}, [\mathcal{B}, \mathcal{B}]]], \ldots$$

gdzie $[\mathcal{C}, \mathcal{D}]$ oznacza nawias Liego między elementami podzbiorów $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset A$.

Jeśli $X(t, x)$ jest układem Liego, to istnieje algebra Vessiota–Guldberga $V$ taka, że $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}} \subset V$. Wówczas $\mathrm{Lie}(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}) \subset V$. Innymi słowami, $\mathrm{Lie}(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ jest algebrą Liego skończonego wymiaru. Odwrotnie, jeśli $\mathrm{Lie}(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ jest algebrą Liego skończonego wymiaru, to $X(t, x)$ jest algebrą Liego.

## Krótkie twierdzenie Liego–Scheffersa

*Układ równań różniczkowych $X(t, x)$ jest układem Liego, wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathrm{Lie}(\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}})$ jest algebrą Liego skończonego wymiaru.*

## Znikoma algebra Liego

Znikomą algebrą Liego pola wektorowego $X(t, x)$ nazywa się najmnieszą algebrę Liego $V^X$ zawierającą $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}}$.

# Równania Riccatiego drugiego rzędu

Rozpatrzmy teraz równania Riccatiego drugiego rzędu, tj.

$$\ddot{x} + (b_0(t) + b_1(t)x)\dot{x} + c_0(t) + c_1(t)x + c_2(t)x^2 + c_3(t)x^3 = 0,$$

gdzie

$$b_1(t) = 3\sqrt{c_3(t)}, \qquad b_0(t) = \frac{c_2(t)}{\sqrt{c_3(t)}} - \frac{\dot{c}_3(t)}{2c_3(t)}, \qquad c_3(t) \neq 0.$$

Jeżeli dodamy zmienne $v = \dot{x}$ do tych układów, to nie uzyskamy układ'ow Liego. Jednak, te równania posiadają funkcję Lagranjowską wzorem

$$L(t, x, v) = \frac{1}{v + U(t, x)},$$

gdzie $U(t, x) = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2$ i $a_0(t), a_1(t), a_2(t)$ są funkcjami zmiennych czasu zależne od $c_1(t), c_2(t), c_3(t)$.

Ta funkcja Lagranjowska jest powiązana z funkcją Hamiltonowską

$$h(t,x,p) = vp - L(t,x,v) = -2\sqrt{-p} - p\,U(t,x).$$

Jej równania Hamiltona są

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = \dfrac{1}{\sqrt{-p}} - a_0(t) - a_1(t)x - a_2(t)x^2, \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = p(a_1(t) + 2a_2(t)x). \end{cases}$$

Udowodnimy, że ten układ jest układem Liego. Rozważmy pola wektorowe

$$X_1 = \frac{1}{\sqrt{-p}}\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x\frac{\partial}{\partial x} - p\frac{\partial}{\partial p},$$
$$X_4 = x^2\frac{\partial}{\partial x} - 2xp\frac{\partial}{\partial p}, \quad X_5 = \frac{x}{\sqrt{-p}}\frac{\partial}{\partial x} + 2\sqrt{-p}\frac{\partial}{\partial p},$$

na $\mathcal{O}$.

One spełniają relacje komutacyjne

$$
\begin{aligned}
&[X_1, X_2] = 0, && [X_1, X_3] = \frac{1}{2}X_1, && [X_1, X_4] = X_5, && [X_1, X_5] = 0, \\
&[X_2, X_3] = X_2, && [X_2, X_4] = 2X_3, && [X_2, X_5] = X_1, && \\
&[X_3, X_4] = X_4, && [X_3, X_5] = \frac{1}{2}X_5, && && \\
&[X_4, X_5] = 0. && && &&
\end{aligned}
$$

Zatem one generują algebrę Vessiota–Guldberga pięciowymiarową $V$. Ponadto, pole wektorowe zależne od czasu $X_t$ powiązane z układami Hamiltona (25) ma formę

$$X(t, x, p) = X_1(x, p) - a_0(t)X_2(x, p) - a_1(t)X_3(x, p) - a_2(t)X_4(x, p),$$

Wówczas układ (25) jest układem Liego. Poza tym, pola wektorowe $X_1, \ldots, X_5$ są polami Hamiltonowskimi związanymi ze strukturą symplektyczną na rozmaitości $\mathrm{T}^*\mathbb{R}$.

Dokładniej, poniższe pola wektorowe mają Hamiltonowskie funkcje

$$h_1(x,p) = -2\sqrt{-p}, \quad h_2(x,p) = p, \quad h_3(x,p) = xp,$$
$$h_4(x,p) = x^2 p, \quad h_5(x,p) = -2x\sqrt{-p},$$

takie, że

| $\{h_i, h_j\}$ | $h_1$ | $h_2$ | $h_3$ | $h_4$ | $h_5$ | $h_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_1$ | $0$ | $0$ | $h_1/2$ | $h_5$ | $2h_6$ | $0$ |
| $h_2$ | $0$ | $0$ | $h_2$ | $2h_3$ | $h_1$ | $0$ |
| $h_3$ | $-h_1/2$ | $-h_2$ | $0$ | $h_4$ | $2h_6$ | $0$ |
| $h_4$ | $-h_5$ | $-2h_3$ | $-h_4$ | $0$ | $h_5/2$ | $0$ |
| $h_5$ | $-2h_6$ | $-h_1$ | $-2h_6$ | $-h_5/2$ | $0$ | $0$ |
| $h_6$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ | $0$ |

i

$$h_t = h_1 - a_0(t)h_2 - a_1(t)h_3 - a_2(t)h_4.$$

Równiania Riccatiego drugiego rzędu mogą być powiązane z działania grupy Liego $\Phi : G \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ w formie

$$\Phi\left(\left(\left(\begin{array}{c}\lambda_1\\ \lambda_2\end{array}\right),\left(\begin{array}{cc}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{array}\right)\right),\left(\begin{array}{c}x\\ p\end{array}\right)\right)=$$
$$\left(\frac{x_0-\lambda_1\sqrt{-p_0}}{1+\lambda_5(-p_0)^{-1/2}},-(\sqrt{-p_0}+\lambda_5)^2\right).$$

i zasadą superpozycji

$$x_{(0)}=\frac{\Delta_3(\sqrt{-p_2}x_2-\sqrt{-p_1}x_1)+\Delta_2(\sqrt{-p_1}x_1-\sqrt{-p_3}x_3)+\Delta_1 x_1\sqrt{-p_1}}{\Delta_3(\sqrt{-p_2}-\sqrt{-p_1})+\Delta_2(\sqrt{-p_1}-\sqrt{-p_3})+\sqrt{-p_1}k_1},$$
$$p_{(0)}=\frac{(\Delta_1\sqrt{-p_1}+\Delta_3(\sqrt{-p_1}-\sqrt{-p_2})+\Delta_2(\sqrt{-p_1}-\sqrt{-p_3}))(\Delta_2+\sqrt{p_1p_2}(x_2-x_1))}{\Delta_1\sqrt{p_2p_1}(x_1-x_2)+\Delta_2\sqrt{p_2p_3}(x_2-x_3)+\sqrt{p_3p_2}(x_3-x_2)+\Delta_1}.$$

## Definicja

*Strukturą Liego–Hamiltona* nazywamy trókę $(M, \Lambda, h)$, gdzie $(M, \Lambda)$ to rozmaitośc Poissona z bi-wektorem Poissona $\Lambda$ i $h$ to $t$-parametryzowana rodzina funkcji $h_t : M \to \mathbb{R}$, taka, że $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ to algebra Liego skończonego wymiaru.

## Definicja

*Układem Liego–Hamiltona* nazywamy układ $X$ na rozmaitości Poissona $(M, \Lambda)$ taki, że istnieje struktura Liego–Hamiltona $(M, \Lambda, h)$ taka, że $X_t \in \widehat{\Lambda}(-dh_t)$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Trójkę $(M, \Lambda, X)$ nazywamy trójką *Liego–Hamiltona*.

Oscylatory Winternitza–Smorodinsky'ego można zapisać w następujący sposób

$$\begin{cases} \dot{x}_i = p_i, \\ \dot{p}_i = -\omega^2(t)x_i + \dfrac{k}{x_i^3}, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Powyższy układ opisuje całki pola wektorowego zależnego od czasu

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} \left[ p_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \left( -\omega^2(t)x_i + \frac{k}{x_i^3} \right) \frac{\partial}{\partial p_i} \right].$$

na $\mathrm{T}^*\mathbb{R}^n$. Rozpatrzmy pola wektorowe

$$X_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \quad X_2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \left( x_i \frac{\partial}{\partial x_i} - p_i \frac{\partial}{\partial p_i} \right),$$

$$X_3 = \sum_{i=1}^{n} \left( p_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{k}{x_i^3} \frac{\partial}{\partial p_i} \right).$$

Za pomocą tych pól wektorowych można zapisać $X_t = X_3 - \omega^2(t) X_1$.

Ponieważ

$$[X_1, X_2] = -X_1, \qquad [X_2, X_3] = X_3, \qquad [X_1, X_3] = 2X_2,$$

zatem powyższy układ jest układem Liego. Ponadto, pola wektorowe $X_1, X_2$ i $X_3$ są polami wektorowymi powiązanymi z funkcjami Hamiltonowskimi

$$h_1 = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad h_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(p_i^2 + \frac{b_i}{x_i^2}\right),$$

które spełniają relacje komutacyjne

$$\{h_1, h_2\} = h_1, \quad \{h_1, h_3\} = -2h_2, \quad \{h_2, h_3\} = -h_3.$$

Ponieważ $X_t = -\widehat{\Lambda}(d(h_3 - \omega^2(t)h_1))$, więc $(M, \Lambda, h)$ to struktura Liego–Hamiltona.

Niech $\mathfrak{g}$ będzie algebrą Liego, jej przestrzeń dualna $\mathfrak{g}^*$ ma strukturę rozmaitości Poissona $(\mathfrak{g}^*, \{,\}_{\mathfrak{g}^*})$. Dokładniej,

$$\{f, g\}_{\mathfrak{g}^*}(\theta) = \langle [d_\theta f, d_\theta g]_{\mathfrak{g}}, \theta \rangle, \qquad f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*).$$

Rozpatrzmy układy w formie

$$\frac{d\theta}{dt} = -\mathrm{ad}^*_{\phi(t)}\theta, \qquad \theta \in \mathfrak{g}^*,$$

gdzie $\phi(t)$ to krzywa zawarta w $\mathfrak{g}$ i $\mathrm{ad}^*_{\phi(t)}\theta = \theta \circ \mathrm{ad}_{\phi(t)}$.
Wybierzmy bazę $\{e_1, \ldots, e_r\}$ dla $\mathfrak{g}$ ze stałymi strukturalnymi $c_{\alpha\beta\gamma}$, tj. $[e_\alpha, e_\beta]_{\mathfrak{g}} = \sum_{\gamma=1}^r c_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, n$. Zatem pola wektorowe

$$X_\alpha(\theta) = -\mathrm{ad}^*_{e_\alpha}(\theta) \in \mathrm{T}_\theta \mathfrak{g}^*, \qquad \alpha = 1, \ldots, r,$$

generują algebrę Vessiota–Guldberga dla układu na $\mathfrak{g}^*$.

Ponadto, te pola wektorowe są Hamiltonowskimi polami z funkcjami Hamiltonowskimi $h_\alpha = -\langle \cdot, e_\alpha \rangle$. Co więcej, funkcje $h_\alpha$ generują algebrę Liego $(W, \{,\}_{\mathfrak{g}^*})$ skończonego wymiaru:

$$\begin{aligned}\{h_\alpha, h_\beta\}_{\mathfrak{g}^*}(\theta) &= \langle [d_\theta h_\alpha, d_\theta h_\beta]_{\mathfrak{g}}, \theta \rangle = \langle [e_\alpha, e_\beta]_{\mathfrak{g}}, \theta \rangle \\ &= \sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta\gamma} \langle e_\gamma, \theta \rangle = -\sum_{\gamma=1}^{r} c_{\alpha\beta\gamma} h_\gamma(\theta).\end{aligned}$$

W konsekwencji, za pomocą każdej krzywej $h_t$ w $(W, \{,\}_{\mathfrak{g}^*})$ możemy zdefinionować strukturę Liego–Hamiltona $(\mathfrak{g}^*, \Lambda_{\mathfrak{g}^*}, h)$.
Wówczas $X_t = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha$, gdzie $\phi(t) = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) e_\alpha$.
Ponieważ $X_\alpha$ są Hamiltonowskimi polami wektorowami, zatem

$$X_t = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) X_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) \widehat{\Lambda}(-dh_\alpha) = \widehat{\Lambda}\left[-d\left(\sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) h_\alpha\right)\right].$$

Innymi słowami, trójca $(\mathfrak{g}^*, \Lambda_{\mathfrak{g}^*}, h)$, gdzie $h_t = \sum_{\alpha=1}^{r} b_\alpha(t) h_\alpha$, jest strukturą Liego–Hamiltona dla układu $X$.

# Pole wektorowe zależne od czasu (jeszcze raz)

Z każdym polem wektorowym $X$ n rozmaitości $N$ można powiązać dystrybucję $\mathcal{D}^X$ taką, że

$$\mathcal{D}^X_x = \{Y_x \mid Y \in V^X\},$$

i jedną kodystrybucję

$$\mathcal{V}^X_x = \{\omega_x \mid \omega_x(Y) = 0, \forall Y \in \mathcal{D}^X_x\} = (\mathcal{D}^X_x)^\circ.$$

Można stwierdzić, że $\mathcal{D}^X$ jest inwolutywną dystrybucją. Ponadto, $\dim \mathcal{D}_x$ jest lokalnie maksymalny w otwartym i gęstym podzbiorze $U \subset N$.

# Pole wektorowe zależne od czasu

**Lemat**

*Dla każdego punktu $p \in U$ gdzie $\dim \mathcal{D}^X = k$, istnieje (lokalna) baza dla kodystrybucji $\mathcal{V}^X$ w postaci*

$$df_1, \ldots, df_{n-k},$$

*gdzie $f_1, \ldots, f_{n-k} : V \subset U \to \mathbb{R}$ są całkami pierwszami pól wektorowych w dystrybucji $\mathcal{D}^X|_V$.*

**Twierdzenie**

Funkcja $f : V \subset N \to \mathbb{R}$ to całka układu $X$, wtedy i tylko wtedy, gdy $df \in \mathcal{V}^X|_V$.

## Lemat

*Dla każdego układu Liego–Hamiltona $X$ posiadającego strukturę Liego–Hamiltona $(M, \Lambda, h)$, odwzorowanie $\widehat{\Lambda} \circ d : \mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}) \to V^X$ jest homomorfizmem surjektywnym między algebrami Liego. W rezultacie,*

$$V^X \simeq \frac{\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})}{\ker\left(\widehat{\Lambda} \circ d\right)}$$

*i elementy algebry $V^X$ są Hamiltonowskimi polami wektorowymi na rozmaitości Poissona $(M, \Lambda)$.*

## Dowód

Odwzorowanie $\widehat{\Lambda} \circ d$ jest liniowe. Ponadto,

$$\widehat{\Lambda} \circ d\{f, g\}_\Lambda = \widehat{\Lambda}[df, dg]_\Lambda = [\widehat{\Lambda}(df), \widehat{\Lambda}(dg)] \qquad \forall f, g \in C^\infty(M).$$

Łatwo zauważyć, że $\widehat{\Lambda} \circ d$ jest surjektywny. Z tego wynika stwierdzenie lematu.

## Twierdzenie

*Dany układ $X$ jest układem Liego–Hamiltona względem rozmaitości Poissona $(M, \Lambda)$, wtedy i tylko wtedy, gdy jest układem Liego a elementy algebry $V^X$ są Hamiltonowskimi polami wektorowymi.*

Niech $(M, \Lambda, h)$ będzie strukturą Liego-Hamiltona dla układu $X$. Odwzorowanie $\widehat{\Lambda} \circ d$ jest morfizmem między algebrami Liego $(C^\infty(M), \{,\}_\Lambda)$ i $(\mathfrak{X}(M), [,])$. Ponieważ $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ ma skończony wymiar, to $\widehat{\Lambda} \circ d(\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}))$ ma skończony wymiar. Zatem, $X_t \in V^X = \widehat{\Lambda} \circ d(\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}))$ i $X$ to układ Liego. Łatwo zauważyć, że $V^X$ są Hamiltonowskimi polami wektorowymi względem rozmaitości $(M, \Lambda)$.

Odwrotnie, jeśli $X$ to układ Liego i elementy algebry $V^X$ są Hamiltonowskimi polami wektorowymi, to można definiować zbiór $h_1, \ldots, h_r$ Hamiltonowskich funkcji (nad $M$) dla tych pól. Wówczas $I_{ij} = \{h_i, h_j\}$ to funkcja Hamiltonowska dla pola wektorowego $Y_{ij} = -[X_i, X_j] \in V^X$. Zatem, istnieją kombinacje

$$g_{ij} = \lambda_1 h_1, \ldots, \lambda_n h_n,$$

takie, że każda $g_i j$ jest funcją Hamiltonowską dla $Y_{ij}$. W konsekwencji, każda funkcja $I_{ij} - g_{ij}$ jest Casimir. Jeśli

$$V = \{h_1, \ldots, h_n\}, \qquad V^{(1)} = \{I_{ij} - g_{ij} \mid i = 1, \ldots, n\},$$

to łatwo zauważyć, że $V \oplus V^{(1)}$ jest algebrą funkcji skończonego wymiaru i $X_t = -\widehat{\Lambda}(dh_t)$.

### Twierdzenie

*Niech $(M, \Lambda, h)$ będzie strukturą Liego–Hamiltona. Układ w postaci $X_t = \widehat{\Lambda}(-dh_t)$ jest układem Liego-Hamiltona.*

# Układy Liego-Hamiltona i zasady superpozycji

## Twierdzenie

*Dany układ Liego–Hamiltona $X$ powiązany ze strukturą Liego–Hamiltona $(M, \Lambda, h)$ taką, że* $\dim \mathcal{D}^X = \dim M = \dim V^X = \mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$, *więc $X$ i $\Lambda$ mogą być zapisane w liniowej postaci na pewnym układzie współrzędnych.*

## Dowód

Ponieważ zakładaliśmy, że $\dim V^X = \dim \mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$, istnieje baza $h_1, \ldots, h_r$, dla algebry Liego $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$ taka, że Hamiltonowskie pola wektorowe $X_1, \ldots, X_r$ tych elementów są bazą dla $V^X$. Ponadto, mamy $\dim M = \dim V^X$, więc te pola wektorowe są (lokalną) bazą dla kostycznej przestrzeni $TM$. Wówczas $h_1, \ldots, h_r$ są układem współrzędnych na $M$ i

$$\Lambda = \sum_{i,j=1}^{r} \{h_i, h_j\} \frac{\partial}{\partial h_i} \wedge \frac{\partial}{\partial h_j} = \sum_{i,j,k=1}^{r} c_{ijk} h_k \frac{\partial}{\partial h_i} \wedge \frac{\partial}{\partial h_j}. \quad (2)$$

Łatwo zauważyć, że $X_t = -\widehat{\Lambda} \circ df_t$, gdzie $f_t$ to krzywa zawarta w algebrze $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$. Zatem

$$X_t = -\widehat{\Lambda} \circ dh_t = -\widehat{\Lambda} \circ d\left(\sum_{l=1}^{n} b_l(t) h_l\right) = -\sum_{l=1}^{n} b_l(t)(\widehat{\Lambda} \circ dh_l)$$

$$= -2 \sum_{j,k=1}^{n} b_l(t) c_{ljk} h_k \frac{\partial}{\partial h_j}.$$

W rezultacie, $X_t$ jest liniowe i posiada liniową zasadę superpozycji w tym układzie współrzędnych.

## Twierdzenie

*Dany układ Liego–Hamiltona $X$ ustalony na rozmaitości $M$, takiej że* $\dim \mathcal{D}^X = \dim M$*, to $M$ ma wymiar parzysty.*

## Dowód

Niech $(M, \Lambda, X)$ będzie trójcą Liego–Hamiltona a $(M, \Lambda, h)$ strukturą Liego–Hamiltona dla układu $X$. Załóżmy, że $V^X$ jest algebrą Liego skónczonego wymiaru. Zatem istnieje (lokalnie) rodzina pól wektorowych $X_1, \ldots, X_n \in V^X$ liniowo niezależnych. Wówczas, rodzina 1–form $dh_1, \ldots, dh_n \in W$, jest liniowo niezależna i $\widehat{\Lambda}(\omega_j) = X_j$ dla $j = 1, \ldots, n$. W konsekwencji, odwzorowanie $\widehat{\Lambda}|_U$ jest izomorfizmem. Zatem, $M$ ma parzysty wymiar.

## Twierdzenie

*Dany układ Liego-Hamiltona $X$ ustalony na rozmaitości $M$ takiej, że* $\dim \mathcal{D}^X = \dim M$ *i $X$ posiada strukturę Liego–Hamiltona $(M, \Lambda, h)$ taką, że* $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}}) \simeq V^X$*, więc centrum $V^X$ jest trywialne.*

## Dowód

Niech $X_1$ będzie nietrywialnym elementem centrum algebry $V^X$. Ponieważ $\dim \mathcal{D}^X = n$, istnieją pola wektorowe $X_2, \ldots, X_n \in V^X$ generujące (razem z $X_1$) lokalną bazę dla wiązki stycznej $TM$. Jednocześnie, te pola wektorowe są Hamiltonowskimi polami wektorowymi względem pewnych funkcji $h_1, \ldots, h_n$ zawartych w $\mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$. Jako, że $X_1, \ldots, X_n$ są liniowo niezależne, to $dh_1, \ldots, dh_n$ są liniowo niezależne. Wówczas $\{h_1, \ldots, h_n\}$ to układ współrzędnych w $M$.

Jako, że $V^X \simeq \mathrm{Lie}(\{h_t\}_{t\in\mathbb{R}})$, więc $[X_1, X_j] = 0$, dla $j = 2, \ldots, n$, oznacza, że $\{h_1, h_j\} = 0$. Wówczas,

$$\Lambda = \sum_{i,j=2}^{n} \{h_i, h_j\} \frac{\partial}{\partial h_i} \wedge \frac{\partial}{\partial h_j} \Longrightarrow X_1 = \widehat{\Lambda}(dh_1) = 0.$$

Zatem $V^X$ ma trywialne centrum.

# Całka układy Liego–Hamiltona

## Twierdzenie

Rodzina $\mathcal{I}^X|_U$ całek niezależnych od czasu na zbiorze otwartym $U \subset M$ dla trójcy $(M, \Lambda, X)$ jest algebrą Poissona i ko-dystrybucja $\mathcal{V}^X$ jest inwolutywna, tj. $[\omega, \omega']_\Lambda \in \mathcal{V}^X|_U$ dla każdych $\omega, \omega' \in \mathcal{V}^X|_U$.

## Dowód

Dane dwie całki $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$, to $df_i(Y) = 0$, $i = 1, 2$, dla każdego pola wektorowego $Y \in V^X$. Ponieważ $X$ to układ Liego–Hamiltona, elementy w $V^X$ są Hamiltonowskimi polami wektorowymi. Wówczas, można zapisać $Y\{f, g\} = \{Yf, g\} + \{f, Yg\}$ dla każdej pary funkcji $f, g \in C^\infty(M)$. Zatem $Y(\{f_1, f_2\}) = \{Yf_1, f_2\} + \{f_1, Yf_2\} = 0$. Jako, że $\lambda f_1 + \mu f_2$ i $f_1 \cdot f_2$ są również całkami niezależnymi od czasu dla każdych $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, to rodzina $\mathcal{I}^X|_U$ jest algebrą Poissona.

Ko-dystrybucja jest inwolutywna, wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej lokalnej bazy nawias Liego między jej elementami należy do dystrybucji. Ko-dystrybucja $\mathcal{V}^X$ ma lokalką bazę $df_1, \ldots, df_{n-k}$. Ponadto, $[df_i, df_j]_\Lambda = d(\{f_i, f_j\})$ i funkcja $\{f_i, f_j\}$ jest całką pierwszą. Zatem $\{f_i, f_j\} = G(f_1, \ldots, f_{n-k})$ wynika, że $[df_i, df_j]_\Lambda \in \mathcal{V}^X$.

### Twierdzenie

Jeżeli $X$ to układ Liego–Hamiltona, więc przestrzeń $\mathcal{I}^X|_U$ jest grupą funkcji.

## Definicja

Niech $X$ będzie układem na rozmaitości Poissona $(M, \Lambda)$, jego *dystrybucja symetrii*, $\mathcal{S}^X_\Lambda$, jest dystrybucją Stefana–Sussmana w formie

$$(\mathcal{S}^X_\Lambda)_x = \widehat{\Lambda}_x(\mathcal{V}^X_x) \in T_xM.$$

## Twierdzenie

*Niech $X$ będzie układem Liego–Hamiltona, to*

- *Dystrybucja symetrii powiązana z układem $X$ jest inwolutywna.*
- *Jeśli $f$ jest całką pierwszą (niezależną od czasu) dla układu $X$, to $\widehat{\Lambda}(df)$ jest symetrią Liego (niezależną od czasu) dla $X$.*
- *Dystrybucja $\mathcal{S}^X$ ma lokalną bazę symetrii Liego dla układu $X$. Ponadto, elementy tej bazy są Hamiltonowskimi polami wektorotwymi powiązanymi z funkcjami Hamiltonowskimi, które są całkami ruchu (niezależnymi od czasu) dla $X$.*

Dla każdych pól wektorowych $Y_1, Y_2$ w $\mathcal{S}^X$, istnieją dwie 2-formy $\omega, \omega' \in \mathcal{S}^X$ takie, że $Y_1 = \widehat{\Lambda}(\omega)$, $Y_2 = \widehat{\Lambda}(\omega')$. Ponieważ $X$ jest układem Liego–Hamiltona, to $\mathcal{V}^X$ jest inwolutywna. Wówczas,

$$[Y_1, Y_2] = [\widehat{\Lambda}(w), \widehat{\Lambda}(w')] = \widehat{\Lambda}([w, w']_\Lambda) \in \mathcal{S}^X.$$

Niech $(M, \Lambda, h)$ będzie strukturą Liego–Hamiltona dla układu $X$:

$$[X_t, \widehat{\Lambda}(df)] = -[\widehat{\Lambda}(dh_t), \widehat{\Lambda}(df)] = -\widehat{\Lambda}(d\{h_t, f\}) = -\widehat{\Lambda}[d(X_t f)] = 0.$$

Ponieważ $\mathcal{V}^X$ ma lokalną bazę $df_1, \ldots, df_{n-k}$, gdzie $f_1, \ldots, f_{n-k}$ to rodzina całek ruchu (niezależnych od czasu) dla $X$. Wówczas, $X_{f_1}, \ldots, X_{f_{n-k}}$, to rodzina symetrii Liego dla $X$ generująca (lokalnie) $\mathcal{S}^X$. Z tego, można łatwo wybrać (lokalną) bazę dla $\mathcal{S}^X$.

### Twierdzenie

Jeśli $Y$ to Hamiltonowskie pole wektorowe i symetria Liego dla układu Liego–Hamiltona $X$ takie, że $[V^X, V^X] = V^X$, więc $Y \in \mathcal{S}^X$.