Separacja ruchu środka masy w układzie relatywistycznych cząstek naładowanych w zewnętrznym polu elektromagnetycznym

Albert Wienczek

Wydział Fizyki
Uniwersytet Warszawski

Warszawa, 19 listopada 2013

Wprowadzenie

- Separacji ruchu globalnego relatywistycznych cząstek w zewnętrznym polu EM nie da się w pełni przeprowadzić.
- Wyznaczenie parametrów wymaga jednak częściowego odseparowania ruchu środka masy.
- Przykłady:
  - średni ładunkowy promień kwadratowy,
  - czynnik żyromagnetyczny,
  - polaryzowalność (jądro atomowe).

Sytuacja fizyczna

- uproszczony model – tylko oddziaływania EM
- N dowolnych relatywistycznych cząstek
- dla każdej cząstki określa się
  - masę m_a
  - ładunek e_a
  - spin $\vec{s}_a$
  - promień ładunkowy $\langle r_a^2 \rangle$
- jednorodne zewnętrzne pole elektryczne $\vec{E}$

Hamiltonian nierelatywistyczny

$$H = \sum_{a}^{N} H_a + \sum_{a>b} H_{ab}$$

$$H_a = \frac{(\vec{p}_a - e_a\,\vec{A}(\vec{r}_a))^2}{2m_a} + e_a A^0(\vec{r}_a) - \frac{e_a g_a}{2m_a}\vec{s}_a \cdot \vec{B}(\vec{r}_a)$$
$$H_{ab} = \frac{e_a e_b}{4\pi}\frac{1}{r_{ab}}$$

Transformacja kanoniczna hamiltonianu

$$H' = e^{-i\phi} H e^{i\phi} + \partial_t \phi = H + \delta H$$
$$\delta H = \partial_t \phi - i[\phi, H] + \ldots$$

Reparametryzacja

$$\vec{R} = \sum_a \frac{m_a}{M} \vec{r}_a$$

$$\vec{P} = \sum_a \vec{p}_a$$

$$\vec{x}_a = \vec{r}_a - \vec{R}$$

$$\vec{q}_a = \vec{p}_a - \frac{m_a}{M} \vec{P}$$

Transformacja Powera-Zienaua-Wooleya

$$\phi = \sum_a e_a \int_0^1 du \vec{x}_a \cdot \vec{A}(\vec{R} + u\vec{x}_a) = \sum_a e_a \left[x_a^i A^i + \frac{1}{2} x_a^i x_a^j A^i_{,j} + \ldots \right]$$

Częściowo rozseparowany hamiltonian

$$
\begin{aligned}
H' = &\sum_a \frac{q_a^2}{2m_a} + \frac{\Pi^2}{2M} + \sum_a \frac{e_a^2}{8m_a}(\vec{x}_a \times \vec{B})^2 + \frac{3}{8M}(\vec{D} \times \vec{B})^2 \\
&- \sum_a \frac{e_a}{2m_a}\vec{l}_a \cdot \vec{B} + \left\{ \frac{\Pi^j}{2M}, (\vec{D} \times \vec{B})^j + \frac{\epsilon^{jil}}{2} D^{ik} B^l_{,k} \right\} \\
&- \sum_a \frac{e_a}{6m_a}(l_a^l x_a^k + x_a^k l_a^l) B^l_{,k} - \sum_a \frac{e_a g_a}{2m_a} s_a^j (B^j + x_a^i B^j_{,i}) \\
&+ eA^0 - D^i E^i - \frac{1}{2} D^{ij} E^i_{,j} + \sum_{a>b} \frac{e_a e_b}{4\pi x_{ab}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\Pi} &= \sum_a \left(\vec{p}_a - e_a \vec{A}(\vec{R})\right) = \vec{P} - e\vec{A} \\
D^i &= \sum_a e_a x_a^i \\
D^{ij} &= \sum_a e_a x_a^i x_a^j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{l}_a &= \vec{x}_a \times \vec{q}_a \\
\vec{E}' &= \vec{E} + \frac{\vec{\Pi}}{M} \times \vec{B} \\
E'^i_{,j} &= E^i_{,j} + \frac{\epsilon^{jil}}{M} \Pi^j B^l_{,k}
\end{aligned}
$$

Hamiltonian z poprawkami relatywistycznymi w statycznym polu elektrycznym

$$H = \sum_a^N H_a + \sum_{a>b} H_{ab}$$

$$\begin{aligned}
H_a &= \frac{\vec{p}_a^{\,2}}{2\,m_a} - \frac{\vec{p}_a^{\,4}}{8\,m_a^3} + e_a\,A^0(\vec{r}_a) - \frac{e_a}{4\,m_a^2}\,(g_a - 1)\,\vec{s}_a \cdot \left(\vec{E} \times \vec{p}_a - \vec{p}_a \times \vec{E}\right) \\
H_{ab} &= \frac{e_a\,e_b}{4\,\pi}\left\{\frac{1}{r_{ab}} - \frac{1}{2\,m_a\,m_b}\,p_a^i\left(\frac{\delta^{ij}}{r_{ab}} + \frac{r_{ab}^i\,r_{ab}^j}{r_{ab}^3}\right)p_b^j - \frac{2\,\pi}{3}\,\langle r_a^2 + r_b^2\rangle\,\delta^3(r_{ab})\right. \\
&\quad + \frac{1}{2\,r_{ab}^3}\left[\frac{g_a}{m_a\,m_b}\,\vec{s}_a \cdot \vec{r}_{ab} \times \vec{p}_b - \frac{g_b}{m_a\,m_b}\,\vec{s}_b \cdot \vec{r}_{ab} \times \vec{p}_a\right. \\
&\quad \left. + \frac{(g_b - 1)}{m_b^2}\,\vec{s}_b \cdot \vec{r}_{ab} \times \vec{p}_b - \frac{(g_a - 1)}{m_a^2}\,\vec{s}_a \cdot \vec{r}_{ab} \times \vec{p}_a\right] \\
&\quad \left. - \frac{2\,\pi\,g_a\,g_b}{3\,m_a\,m_b}\,\delta^3(r_{ab})\,\vec{s}_a \cdot \vec{s}_b + \frac{g_a\,g_b}{4\,m_a\,m_b}\,\frac{s_a^i\,s_b^j}{r_{ab}^3}\left(\delta^{ij} - \frac{3\,r_{ab}^i\,r_{ab}^j}{r_{ab}^2}\right)\right\}
\end{aligned}$$

Zestaw transformacji

$$\phi_1 = \frac{P^i P^j}{8M^2} \sum_a (x_a^i q_a^j + x_a^j q_a^i + q_a^i x_a^j + q_a^j x_a^i)$$

$$\phi_2 = -\sum_a \frac{\vec{s}_a}{2m_a} \times \vec{q}_a \cdot \frac{\vec{P}}{M}$$

$$\phi_3 = -\sum_a \left[\frac{e_a}{2m_a}(g_a - 1) - \frac{e}{2M}\right] \vec{s}_a \times \vec{x}_a \cdot \vec{E}$$

$$\phi_4 = \frac{1}{2}\left(\sum_a \frac{q_a^j x_a^i q_a^j}{m_a} + \sum_{a \neq b} \frac{e_a e_b}{4\pi} \frac{x_a^i}{x_{ab}}\right) \frac{P^i}{M}$$

$$\phi_5 = -\frac{1}{4M}(E^j P^i + P^i E^j) \sum_a e_a x_a^i x_a^j$$

$$\phi_6 = \frac{eE^i}{4M} \sum_a (x_a^j q_a^i x_a^j - x_a^i q_a^j x_a^j - x_a^j q_a^j x_a^i)$$

Przetransformowany hamiltonian

$$H_{\text{eff}} = H_{\text{in}} + H_P + H_{E1} + H_{EE}$$

$$\begin{aligned}
H_{\text{in}} &= \sum_{a>b} \frac{e_a\, e_b}{4\,\pi} \left\{ \frac{1}{x_{ab}} - \frac{1}{2\, m_a\, m_b}\, q_a^i \left(\frac{\delta^{ij}}{x_{ab}} + \frac{x_{ab}^i\, x_{ab}^j}{x_{ab}^3} \right) q_b^j - \frac{2\,\pi}{3}\, \langle r_a^2 + r_b^2 \rangle\, \delta^3(r_{ab}) \right. \\
&+ \frac{1}{2\, x_{ab}^3} \left[\frac{g_a}{m_a\, m_b}\, \vec{s}_a \cdot \vec{x}_{ab} \times \vec{q}_b - \frac{g_b}{m_a\, m_b}\, \vec{s}_b \cdot \vec{x}_{ab} \times \vec{q}_a + \frac{(g_b - 1)}{m_b^2}\, \vec{s}_b \cdot \vec{x}_{ab} \times \vec{q}_b \right. \\
&\left. \left. - \frac{(g_a - 1)}{m_a^2}\, \vec{s}_a \cdot \vec{x}_{ab} \times \vec{q}_a \right] - \frac{2\,\pi\, g_a\, g_b}{3\, m_a\, m_b}\, \delta^3(x_{ab})\, \vec{s}_a \cdot \vec{s}_b + \frac{g_a\, g_b}{4\, m_a\, m_b}\, \frac{s_a^i\, s_b^j}{x_{ab}^3} \left(\delta^{ij} - \frac{3\, x_{ab}^i\, x_{ab}^j}{x_{ab}^2} \right) \right\} \\
&+ \sum_a \left(\frac{\vec{q}_a^{\,2}}{2\, m_a} - \frac{\vec{q}_a^{\,4}}{8\, m_a^3} \right),
\end{aligned}$$

$$H_P = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2\, M (1 + \delta M)} - \frac{\vec{P}^{\,4}}{8\, M^3} + e\, A^0 \qquad \delta M = \frac{1}{M} \left\langle \sum_a \frac{\vec{q}_a^{\,2}}{2\, m_a} + \sum_{a>b} \frac{e_a\, e_b}{4\,\pi\, x_{ab}} \right\rangle$$

$$H_{E1} = -\vec{D} \cdot \left(\vec{E} - \frac{\vec{P}}{2\, M} \left(\frac{\vec{P}}{2\, M} \cdot \vec{E} \right) \right) + \frac{e\, E^i}{4\, M} \sum_{a \neq b} \frac{e_a\, e_b}{4\,\pi}\, \frac{x_a^i}{x_{ab}}$$

$$H_{EE} = -\frac{e}{4\, M} \vec{E}^{\,2} \sum_a e_a\, \vec{x}_a^{\,2} + \frac{e^2}{4\, M^2} E^i\, E^j \sum_a m_a \left(2\, x_a^i\, x_a^j - \delta^{ij}\, \vec{x}_a^{\,2} \right)$$

Polaryzowalność

$$\delta E = -\frac{1}{2}\,\alpha_E\,\vec{E}^{\,2}$$

Kwadratowy efekt Starka

$$\delta E = E^i E^j \langle\psi|D^i \frac{1}{E - H_{\text{in}}} D^j|\psi\rangle$$

prowadzi do dobrze znanego wyniku

$$\alpha_E = \frac{2}{3}\langle\psi|D^k \frac{1}{H_{\text{in}} - E} D^k|\psi\rangle.$$

Relatywistyczne poprawki do polaryzowalności

- poprawka do momentu dipolowego

$$H_{E1} = -\vec{D}\cdot\vec{E} + \frac{e\,E^i}{4\,M}\sum_{a\neq b}\frac{e_a\,e_b}{4\,\pi}\,\frac{x_a^i}{x_{ab}}$$

$$\delta D^k = -\frac{e}{4M}\sum_{a\neq b}\frac{e_a e_b}{4\pi}\,\frac{x_a^k}{x_{ab}}$$

- poprawka od członu H_{EE}

$$H_{EE} = -\frac{e}{4\,M}\vec{E}^{\,2}\sum_a e_a\,\vec{x}_a^{\,2} - \frac{e^2}{4\,M^2}\vec{E}^{\,2}\sum_a m_a\,\vec{x}_a^{\,2}$$

$$\begin{aligned}\alpha_E &= \frac{2}{3}\langle\psi|D^k\frac{1}{H_{\rm in}-E}D^k|\psi\rangle + \frac{4}{3}\langle\psi|\delta D^k\frac{1}{H_{\rm in}-E}D^k|\psi\rangle \\ &\quad + \frac{e}{2M}\sum_a e_a\langle x_a^2\rangle + \frac{e^2}{4M^2}\langle I^{kk}\rangle \\ I^{kk} &= 2\sum_a m_a\,x_a^2\end{aligned}$$

Zastosowania

- zagadka promienia protonu,
  R. Pohl, R. Gilman, G. A. Miller, and K. Pachucki, Annu. Rev. Nucl. Part. Sci. 63, 175 (2013)
- eksperyment z helem mionowym w PSI,
  ograniczenie dokładności przewidywań teoretycznych od polaryzowalności jądra
- polaryzowalność błędnie wyznaczana,
  C. Ji, N. N. Dinur, S. Bacca, N. Barnea, Phys. Rev. Lett. 111, 143402 (2013)