Zasady konstrukcji KTP na ściśle rozwiązywalnym przykładzie

Stanisław D. Głazek

VII Obóz SKFiz w Tatrach

Obóz SKFiz 20 VII 2012 Część 1

1.

Cel: pokazać na przykładzie jak można budować "własną" teorię cząstek używając kwantowej teorii pola.
(W domyśle: zachęcić do współpracy. Metoda jest zupełnie nowa; każdy problem zbadany i choćby częściowo rozwiązany będzie nowym wkładem (do fizyki).)

"Własna" teoria? Taka, którą sam rozumiem i potrafię ulepszać zgodnie z wynikami doświadczeń.

"Własna" = własna w sensie posiadania pojęć i reguł operowania nimi.

$\varphi(x)$, $x=(t,\bar{x})$, pole służy do opisu cząstek, jako kwantów pola. Wybierzmy formę dynamiki i zbadajmy ewolucję stanów, które nas interesują.

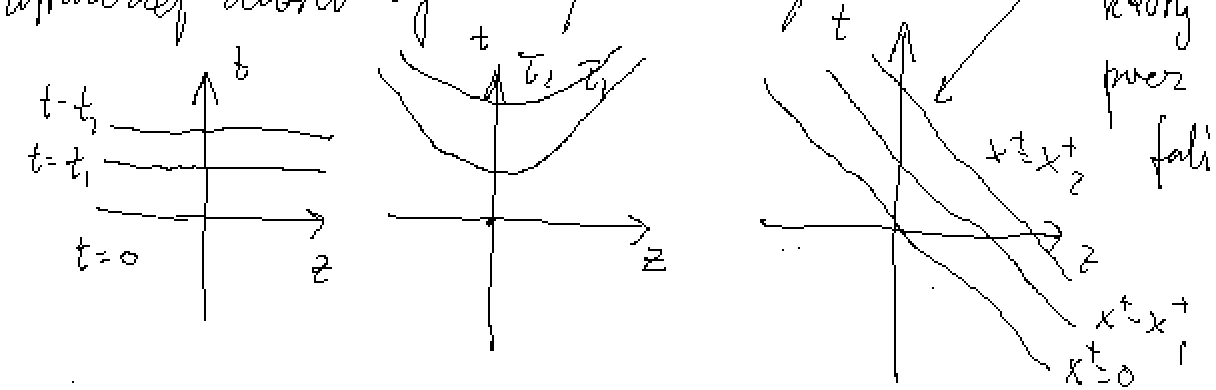
2.

3 formy (jakościowo różne) : instant f., point f., front f..
(moment chwila, ...)

instant = hiperpowierzchnia w czasoprzestrzeni o ustalonej chwili wybranego obs., który
$x^0=0$, $x^0=t_1$, $x_0=t_2$, ...

hiperboloida = $x^2=\tau_1^2$, $x^2=\tau_2^2$, ...

front = $x^+=x^0+x^3=0$, $x^+=x^+_1$, $x^+=x^+_2$, ...



obszar czasoprzestrzeni który jest przebiegany przez front płaskiej fali em.

$x^\pm = t \pm z$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \quad , \quad L = \int d^3x \, \mathcal{L}$$

μ: 0,1,2,3 μ: masa

3.

Ewolucja stanów $\quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle \quad , \quad H = ? \quad , \quad |\Psi\rangle = ?$

$$\varphi = \varphi(\bar{x}, t)\Big|_{t=0} = \varphi(\bar{x}) = \int d^3k \; a_k \, e^{-ikx}$$

, pole rzeczywiste

$$\varphi(\bar{x}) = \int d^3k \left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right)$$

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi^\dagger(\bar{x}) \qquad x^0 = 0$$

$$kx = -\bar{k}\bar{x}$$

$a_k = ? \quad a_k^\dagger = ?$

$$|\Psi\rangle = A_0|0\rangle + A_1 a_{k_1}^\dagger|0\rangle + A_2 a_{k_2}^\dagger|0\rangle + \dots$$
$$+ A_{12}\, a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger |0\rangle + \dots$$
$$+ A_{123}\, a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_3}^\dagger |0\rangle + \dots$$
$$\vdots$$

$|A_i|^2 = P_{i \text{ w } \psi}$

jeśli $\langle\Psi|\Psi\rangle = 1$

Przestrzeń tak bogata, że trudno nad nią zapanować.

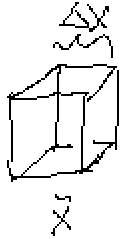
φ służy do zapanowania.

wielośrodkowa przestrzeń.

$H = ?$, $H = p\,\dot q(q,p) - L$, $L = \int d^3x\, \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$

q = położenie uogólnione

p = pęd uogólniony $= \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}$ $\qquad q = \langle \varphi(\bar x) \rangle_{[\bar x, \Delta x]}$



$$q_{\bar x} = \int_V d^3x\, \varphi(\bar x) / \Delta x^3$$

$$\mathcal{L} = \tfrac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2\varphi^2 = \tfrac{1}{2}\dot\varphi^2 - \tfrac{1}{2}(\bar\nabla\varphi)^2 - \tfrac{1}{2}\mu^2\varphi^2$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} \to \frac{\partial L}{\partial \dot q} = \dot q \quad , \quad \bar\nabla\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} (q_{\bar x + \Delta \bar x} - q_{\bar x})/\Delta x$$

$$\dot\varphi(\bar x) = \frac{\delta L}{\delta\dot\varphi(\bar x)} = \left\{ \left[L(\varphi + \delta\varphi) - L(\varphi) \right] [\delta\dot\varphi] \right\}_{|\text{jądro}} = \left\{ \int d^3x \left[(\dot\varphi + \delta\dot\varphi)^2/2 - \dot\varphi^2/2 \right] [\delta\dot\varphi] \right\}_{|\text{jądro}} =$$

4.

$$= \left\{ \int d^3x \left[\dot\varphi\, \delta\dot\varphi \right] \right\} [\delta\dot\varphi] \Big\}_{|\text{jądro}} = \dot\varphi(\bar x) .$$

Ten wzór obowiązuje tu dla $\int_{\Delta x^3} d^3x\, \dot\varphi(\bar x)$

z wynikiem

$\int_{\Delta x^3} d^3x\, \dot\varphi(\bar x)$.

$$H = \int d^3x \left[p(\vec x)\,\dot q(\vec x) - \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \right]$$

$$= \int d^3x \left[\dot\varphi(\vec x)\,\dot\varphi(\vec x) - \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \right]$$

$$= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\dot\varphi^2 + \frac{1}{2}(\vec\nabla\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2/2 \right]$$

$\uparrow$

π^2

$\dot\varphi = \pi$

$\varphi \sim q$

$\dot\varphi \sim p \sim \pi$

5.

$$\varphi\,|\psi(t)\rangle = \varphi\, e^{-iHt} e^{+iHt}\,|\psi(t)\rangle$$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\vec\nabla\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \right], \quad \varphi = \int d^3k \left[a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{ikx} \right], \; t=0$$

$\pi = \dot\varphi$ ale nie wiem jak zależy φ od t.

$\uparrow$

?

Jeśli $\mathcal{L}$ opisuje teorię $\boxed{\text{w pełni}}$ $= \varphi(\vec x, t) = e^{iHt}\varphi(x)\,e^{-iHt} =$

$E_k = \sqrt{\mu^2 + \vec k^2}$ energia oscylacji w naturze, $\omega_k = E_k/\hbar$. $= \int d^3k \left[a_k e^{-iE_k t + i\vec k\vec x} + a_k^+ e^{+ikx} \right]$

6.

$$\varphi(\bar{x}) = \int d^3k \left[a_k \underset{e^{-i\omega t}}{e^{-ikx}} + a_k^{+} \underset{e^{+i\omega t}}{e^{+ikx}} \right]\Bigg|_{t=0} \qquad \hbar = 1 \qquad E = \hbar\omega = \omega$$

$$\pi(\bar{x}) = \dot{\varphi}(\bar{x})$$

$$= \int d^3k\,(-1)\left[a_k (iE_k)\, e^{\overset{i\bar{k}\bar{x}}{-ikx}} + a_k^{+} (-iE_k)\, e^{\overset{-i\bar{k}\bar{x}}{+ikx}} \right]\Bigg|_{t=0}$$

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\bar{\nabla}\varphi)^2 + \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 \right] \leftarrow$$ to H działa na stany zbudowane za pomocą a^{+} z $|0\rangle$.

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k_1\, d^3k_2 \int d^3x \Big\{ (-E_{k_1}E_{k_2}) \left[-a_{k_1} e^{-ik_1x} + a_{k_1}^{+} e^{ik_1x} \right]\left[-a_{k_2} e^{-ik_2x} + a_{k_2}^{+} e^{ik_2x} \right]$$

$$(-\bar{k}_1\bar{k}_2) \left[a_{k_1} e^{-ik_1x} - a_{k_1}^{+} e^{ik_1x} \right]\left[a_{k_2} e^{-ik_2x} - a_{k_2}^{+} e^{ik_2x} \right]$$

$$+ \mu^2 \left[a_{k_1} e^{-ik_1x} + a_{k_1}^{+} e^{ik_1x} \right]\left[a_{k_2} e^{-ik_2x} + a_{k_2}^{+} e^{ik_2x} \right] \Big\}$$

$$\int d^3x \rightarrow (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k}_1 \pm \bar{k}_2)$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k_1\, d^3k_2 \int d^3x \Big\{ (-E_{k_1} E_{k_2}) \left[-a_{k_1} e^{-ik_1x} + a_{k_1}^+ e^{ik_1x}\right]\left[-a_{k_2} e^{-ik_2x} + a_{k_2}^+ e^{ik_2x}\right]$$

$$(-\bar{k}_1 \bar{k}_2) \left[a_{k_1} e^{-ik_1x} - a_{k_1}^+ e^{ik_1x}\right]\left[a_{k_2} e^{-ik_2x} - a_{k_2}^+ e^{ik_2x}\right]$$

$$+ \mu^2 \left[a_{k_1} e^{-ik_1x} + a_{k_1}^+ e^{ik_1}\right]\left[a_{k_2} e^{-ik_2x} + a_{k_2}^+ e^{ik_2x}\right]\Big\}$$

$\int d^3x \to (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k}_1 \pm \bar{k}_2)$

7.

aa	$\delta(k_1+k_2)$	$k_2=-k_1$	$-E_k^2 + k^2 + \mu^2$	$= -\sqrt{\mu^2+k^2}^{\,2} + k^2 + \mu^2 = 0$
a^+a^+	$\delta(k_1+k_2)$	$k_2=-k_1$	0	
a^+a	$\delta(k_1-k_2)$	$k_2=k_1$	$E_k^2 + \bar{k}^2 + \mu^2$	$= 2E_k^2$
aa^+	— " —			$2E_k^2$

$k = k_1$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k\, (2\pi)^3\, 2E_k^2 \left(a_k^+ a_k + a_k a_k^+\right)$$

$\uparrow \frac{d^3k}{2E_k(2\pi)^3}$

$\sim \varphi\ i\ \pi$

$$d^3k = d^4k\, \delta(k^2-\mu^2)\, \theta(k^0) =$$

$$\times \frac{1}{(2\pi)^3} = \frac{d^3k}{2E_k}$$

$$H = \frac{1}{2}\int d^3k \;(2\pi)^3\, 2E_k^2 \left(a_k^+ a_k + a_k a_k^+\right)$$

$$\uparrow \frac{d^3k}{2E_k (2\pi)^3}$$ relatywistyczna teoria

w φ i π

mamy

8.

$$d^3k_1\, d^3k_2 \to \frac{d^3k_1\, d^3k_2}{2E_{k_1}(2\pi)^3\; 2E_{k_2}(2\pi)^3}$$

$$\left[\varphi(\bar{x}),\ \pi(\bar{y})\right] = i\,\delta^3(\bar{x}-\bar{y})$$ kwantyzacja

$$\left[a_{\bar{k}},\ a^+_{\bar{p}}\right] = 2E_k (2\pi)^3\, \delta^3(\bar{k}-\bar{p})$$

$$H = \int \frac{d^3k}{\left[2E_k (2\pi)^3\right]^2} (2\pi)^3\, 2E_k^2 \frac{1}{2}\left(a_k^+ a_k + a_k a_k^+\right)$$

oscylator $H = \frac{1}{2}(a^+a + aa^+)\hbar\omega$

$H = \left(a^+a + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$

opuszczamy $\frac{1}{2}$

$$= \int \frac{d^3k}{2E_k (2\pi)^3} E_k \left[a_k^+ a_k + \frac{1}{2}\delta^3(\underset{\bar{k}=0}{0})\, 2E_k (2\pi)^3\right] = \int [k]\; E_k\, a_k^+ a_k + \Omega$$

czyli Ω

Klasyczna teoria pola + reguły kwantyzacji pola

9.

$$H = \int [k] \; E_k \; a_k^+ a_k$$

$$H \, a_1^+ a_2^+ \dots a_n^+ \, |0\rangle = (E_1 + E_2 + \dots + E_n) \; a_1^+ a_2^+ \dots a_n^+ \, |0\rangle .$$

QED to samo dla elektronów i fotonów swobodnych, plus oddziaływanie $\mathcal{L}_I = \bar{\psi} \not{A} \psi \, e$.

PROBLEM : oddziaływanie powoduje ∞ zmianę teorii. W szczególności, $H_I \, |0\rangle = \infty$, $\| \, |0\rangle \, \| = \infty$.

Część 2 21 VII 2012

$$[k]_\mu = \frac{d^3k}{2E_{k\mu}(2\pi)^3}$$

10.

$$\mathcal{L}_1 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2$$

$$H_1 = \int [k]_\mu \, E_{k\mu} \, a_k^+ a_k \, , \quad E_{k\mu} = \sqrt{\mu^2 + \vec{k}^2} \, , \quad \Omega_\mu = \text{stała} \to 0.$$

$$\mathcal{L}_2 = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 - \frac{1}{2}\nu^2\chi^2 \, ,$$

$$H_2 = \int [k]_\mu \, E_{k\mu} \, a_k^+ a_k + \int [k]_\nu \, E_{k\nu} \, b_k^+ b_k \, ,$$

$\varphi \leftrightarrow a$, $\chi \leftrightarrow b$. Stałe Ω_μ i $\Omega_\nu \to 0$.

11.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_I \quad , \qquad \mathcal{L}_I = -m^2 \varphi \chi \; ,$$

$$H = H_2 + H_I \quad , \qquad H_I = -\int d^3x \, \mathcal{L}_I \, .$$

$$\varphi = \int [k]_\mu \left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \Big|_{t=0} \, .$$

$$\chi = \int [k]_\nu \left(b_k e^{-ikx} + b_k^\dagger e^{ikx} \right) \Big|_{t=0} \, .$$

$$H_I = + \int [k_1]_\mu \int [k_2]_\nu \; m^2 \left(a_{k_1} e^{-ik_1x} + a_{k_1}^\dagger e^{ik_1x} \right) \left(b_{k_2} e^{-ik_2x} + a_{k_2}^\dagger e^{ik_2x} \right)$$

$$\int d^3x$$

$$a_{k_1} b_{k_2} \; \delta^3(k_1 + k_2)(2\pi)^3$$

$$H = \int [k]_\mu \, E_{k\mu} \, a_k^\dagger a_k + \int [k]_\nu \, E_{k\nu} \, b_k^\dagger b_k$$

12.

$$+ \, m^2 \int \frac{d^3k}{2E_{k\mu} \, 2E_{k\nu} \, (2\pi)^3} \left(a_k^\dagger b_{-k}^\dagger + a_k^\dagger b_k + a_k b_k^\dagger + a_k b_{-k} \right)$$

$$[k]_{\mu\nu} = [k]_\mu \frac{1}{2E_\nu} = [k]_\nu \frac{1}{2E_\mu}$$

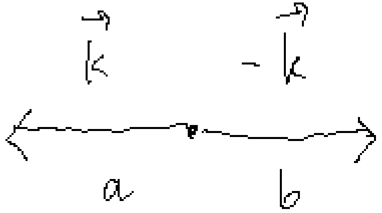
$$= H_f + H_I \qquad\qquad H_I |0\rangle = m^2 \int [k]_{\mu\nu} \, a_k^\dagger b_{-k}^\dagger |0\rangle$$

$\uparrow$ free $(= H_2)$

$\left[m^2 [k_{\mu\nu}] \right]$ = energia

wymiar

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $E = x$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $E = -x$



$|\vec{k}|$ dowolny, całkujemy, ∞.

$$\begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$$

$| H_I |0\rangle | = \infty$. Ta ∞ jest konieczna v teorii relatywistycznej. $\Lambda \bar{k}_\mu = \bar{p}_\mu$.

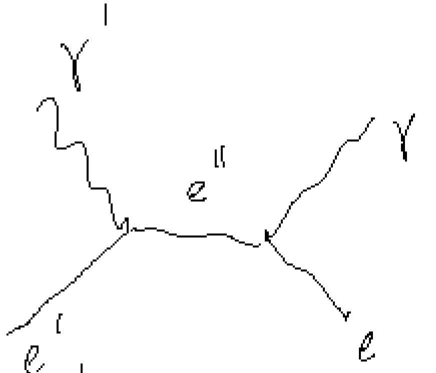
$$[0 \; 1] \begin{bmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

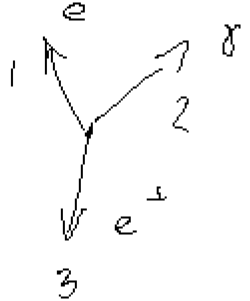
$$H_I = \int d^3x \; e\bar{\Psi}\not{A}\Psi \,, \qquad H_I = m^2 \int d^3x \; \varphi \chi .$$

13.

$$b^\dagger_{k_1} \, a^\dagger_{k_2} \, d^\dagger_{k_3} \cdot (2\pi)^3 \delta^3(\bar{k}_1 + \bar{k}_2 + \bar{k}_3)$$

$$H_I |0\rangle = \int [123] \; |123\rangle \cdot e \cdot \bar{u}_1 \not{\epsilon}^*_2 v_3 \; (2\pi)^3 \delta^3(1+2+3)$$





P.A.M. Dirac

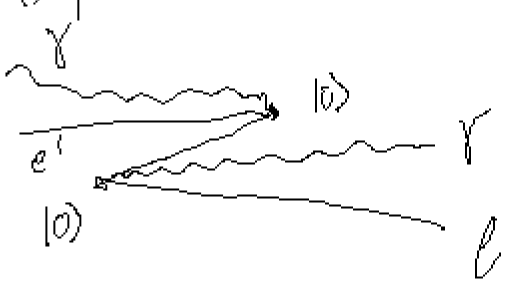
PRD (1965)

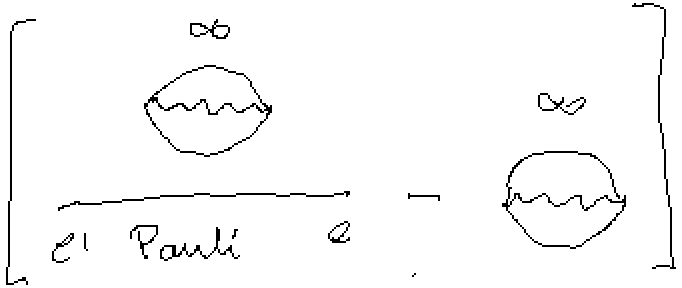
Feynman:

dzielenie przez ampl.

$|w\rangle \longleftarrow |w\rangle$

Pauli blocking





$d = 4 \to 4 - \varepsilon$

$f(4-\varepsilon)$, $\frac{1}{\varepsilon}$, $\ln \varepsilon$, skończone.

$\hookrightarrow 0$ $\quad\hookrightarrow$ efekty renormalizacji

14.

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_\chi - m^2\varphi\chi$$

$$= \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\chi)^2 \overbrace{- \frac{1}{2}\left(\mu^2\varphi^2 + \nu^2\chi^2 + 2m^2\varphi\chi\right)}^{\mathcal{L}_{masa}}$$

$$\psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix} \qquad \mathcal{L}_{masa} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\varphi & \chi\end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix}\mu^2 & m^2\\ m^2 & \nu^2\end{pmatrix}}_{\text{macierz mas}} \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}$$

Diagonalizujemy macierz mas

$$m_{1,2} = \frac{\mu^2+\nu^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^2-\nu^2}{2}\right)^2 + m^2}, \quad v_1 = \begin{pmatrix}\cos\alpha\\ -\sin\alpha\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}\sin\alpha\\ \cos\alpha\end{pmatrix}$$

$$\psi = \xi v_1 + \zeta v_2 \qquad \mathcal{L}(\varphi,\chi) = \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\xi)^2 - m_1^2\xi^2\right] + \frac{1}{2}\left[(\partial_\mu\zeta)^2 - m_2^2\zeta^2\right]$$

1F

$\mathcal{L}(\varphi, \chi) \longrightarrow \mathcal{L}(\xi, \zeta)$

$H(\pi_\varphi, \varphi, \pi_\chi, \chi) \longrightarrow H(\pi_\xi, \xi, \pi_\zeta, \zeta)$

15.

$H_I = \infty$ | $H_I = 0$

$\pi_\varphi = \dot\varphi \quad E_\mu$ | $\pi_\xi = \dot\xi \quad E_{m_1}$

$\pi_\chi = \dot\chi \quad E_\nu$ | $\pi_\zeta = \dot\zeta \quad E_{m_2}$

ta kwantyzacja zawodzi | ta kwantyzacja rozwiązuje problem.

Co zrobić, gdy $\mathcal{L}_I \neq -m^2 \varphi\chi$?

: 1) łamanie symetrii

2) uwięzienie kwarków i gluonów

$$\boxed{\begin{gathered} H_I |0\rangle = \infty \neq 0 \\ |\Omega\rangle = ? \end{gathered}}$$

QED $\longleftrightarrow$ $\frac{1}{\varepsilon} = 0$, ale w QCD próżnia $|0\rangle$ ma być odpowiedzialna za fizykę:

$\alpha_{QCD} \gg$
$\gg \alpha_{QED}$.

Zamiast formy instant użyjmy formy frontowej.

16.

1) człony $a_k^+ b_{-k}^+$ w ogóle nie wystąpią

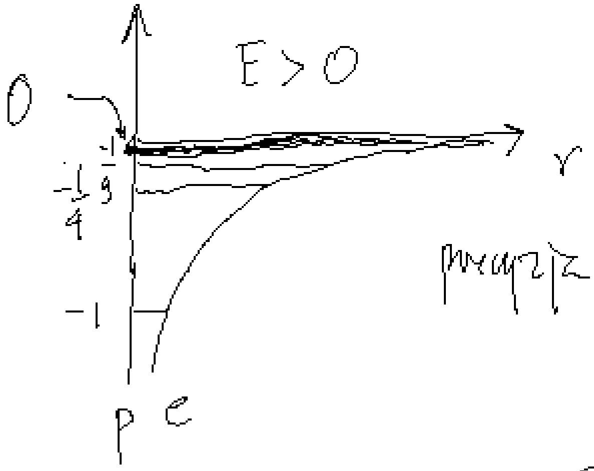
2) procedura grupy renormalizacji dla cząstek efektywnych (RGPEP) odtwarza wynik, tzn. teorię swobodnych cząstek o masach m_1 i m_2 w przykładzie. ← Bez ubierania próżni.

3) ta sama RGPEP może być zastosowana do innych oddziaływań.

Szczególnie interesujący przykład: QCD.
do zbadania

Kwant = cząstka

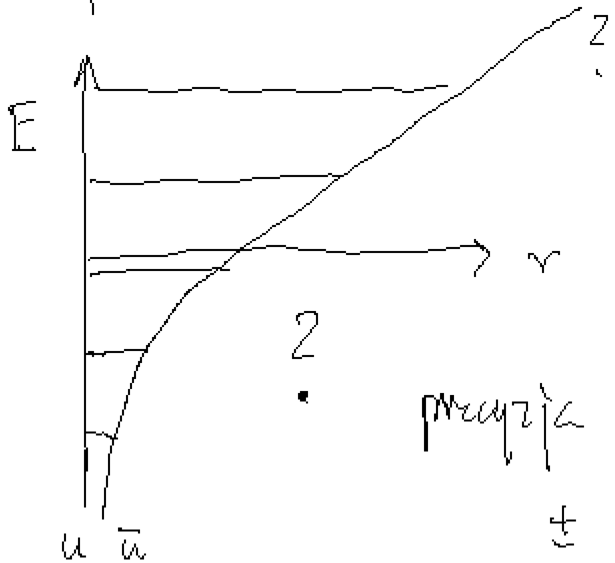
bezmasowe fotony



precyzja "12" miejsc znaczących ($\sim \alpha^6_{QED}$)

17.

masywne gluony



precyzja "1" miejsca znaczącego

± 5%

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 = \frac{1}{2}\left[\partial^+\varphi\,\partial^-\varphi - (\partial^\perp\varphi)^2 - \mu^2\varphi^2\right]$$

$$x^\pm = t \pm z \qquad \perp = 1,2$$

$$kx = \frac{1}{2}k^+x^- + \frac{1}{2}k^-x^+ - k^\perp x^\perp = k^0x^0 - \vec{k}\vec{x}$$

18.

$$\pi = 2\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^-\varphi} = \partial^+\varphi \qquad \partial^\pm = 2\frac{\partial}{\partial x^\mp}$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\pi = 2\frac{\partial}{\partial x^-}\varphi$ = gradient na froncie a nie pochodna po x^+.

$$\boxed{\pi = \text{GRADIENT, NIE } \frac{\partial}{\partial x^+}}$$

$$\mathcal{H} = \text{"}\pi\dot{\varphi} - \mathcal{L}\text{"} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial^\mu\varphi}\partial^\nu\varphi - g^{\mu\nu}\mathcal{L} = T^{\mu\nu}\right]^{+-} = \partial^+\varphi\,\partial^-\varphi - 2\mathcal{L} = (\partial^\perp\varphi)^2 + \mu^2\varphi^2$$

$$"H" = P^- = \frac{1}{2}\int dx^- d^2x^\perp \left[(\partial^\perp \varphi)^2 + \mu^2 \varphi^2 \right]$$

19.

$$\varphi = \int [k] \left(a_k e^{-ikx} + a_k^+ e^{ikx} \right)$$

$$k^+ k^- - k^{\perp 2} = \mu^2$$

$$\frac{dk^+ d^2k^\perp}{2k^+ (2\pi)^3}$$

zniknęła zależność od μ

$$d^4k \, \delta(k^2 - \mu^2)\, \theta(k^0) = = \frac{dk^+ d^2k^\perp}{2k^+} \theta(k^+)$$

$$\delta(k^2 - \mu^2) = \delta\left(k^- - \frac{k^{\perp 2} + \mu^2}{k^+}\right) \frac{1}{|k^+|}$$

$$P^- = \int [k_1][k_2] \frac{1}{2}\int dx^- d^2x^\perp \left(a_{k_1} e^{-ik_1x} + a_{k_1}^+ e^{ik_1x} \right)\left(a_{k_2} e^{-ik_2x} + a_{k_2}^+ e^{ik_2x} \right)$$

$$\frac{1}{2}\int dx^- \, e^{\pm i(k_1+k_2)^+ x^-/2} = (2\pi)^3 \delta(k_1^+ + k_2^+)$$

$$k_1^+ = \sqrt{k_1^{z\,2} + k_1^{\perp 2} + \mu^2} + k_1^z > 0$$

$$\mu^2 > 0, \quad |\vec{k}| < \Lambda$$

$$\boxed{\text{Nie ma } a_{k_1}^+ a_{k_2}^+ \quad a_{k_1} a_{k_2}}$$

$$P^- = \int [k] \frac{k^{\perp 2} + \mu^2}{k^+} a_k^+ a_k + \underbrace{\Omega^-}_{\to 0}$$

20.

$$[a_k, a_p^+] = 2k^+ (2\pi)^3 \delta^3(p-k) \qquad \delta^3(p) = \delta(p^+)\,\delta(p^1) \cdot \delta(p^2)$$

$$P^- = \int [k] \left(\frac{k^{\perp 2} + \mu^2}{k^+} a_k^+ a_k + \frac{k^{\perp 2} + \nu^2}{k^+} b_k^+ b_k \right)$$

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \mathcal{L}_I \qquad \mathcal{L}_I = -m^2 \varphi \chi$$

$$P_I^- = \frac{1}{2} \int dx^- d^2x^\perp \, m^2 \varphi \chi \quad , \qquad \int dx^- d^2x^\perp \, e^{\pm i (k_1 \pm k_2)^+ x^- /2}$$

nie ma członów $a^+ b^+$, ab

21.

$$\hat{P}^- = \frac{1}{2}\int dx^- d^2x^\perp :\Big[(\partial^\perp\hat\phi)^2 + \mu^2\hat\phi^2 + (\partial^\perp\hat\chi)^2 + \nu^2\hat\chi^2 + 2m^2\hat\phi\hat\chi\Big]: \qquad (27)$$

$$= \int [p]\,\theta(p^+)\Big[\frac{p^{\perp 2}+\mu^2}{p^+}a_p^\dagger a_p + \frac{p^{\perp 2}+\nu^2}{p^+}b_p^\dagger b_p + \frac{m^2}{p^+}\left(a_p^\dagger b_p + b_p^\dagger a_p\right)\Big] \qquad (30)$$ w PRD 85, 125018 (2012).

$\hat{P}^-|\psi\rangle = E^-|\psi\rangle$

$E^- = ?$ $\quad |\psi_{E^-}\rangle = ?$

μ i ν nie są masami
cząstek fizycznych (stanów własnych $\hat{P}^-$).
Skąd mogłyby się wziąć m_1 i m_2?

Wprowadzamy parametr grupy renormalizacji s.

s ma interpretację rozmiaru cząstek (efektywnych).

22.

$$\hat{P}^- = \hat{P}_s^-(a_s, b_s) = \hat{P}_0^-(a_0, b_0)$$

$$= \int [k] \left[A_s(k) \cdot a_{sk}^+ a_{sk} + B_s(k) \cdot b_{sk}^+ b_{sk} + C_s(k) \left(b_{sk}^+ a_{sk} + a_{sk}^+ b_{sk} \right) \right]$$

$$A_s(k) = \frac{k^{\perp 2} + \mu^2(s)}{k^+}, \quad B_s(k) = \frac{k^{\perp 2} + \nu^2(s)}{k^+}, \quad C_s(k) = \frac{m^2(s)}{k^+}$$

$a_{0k} = a_k$ kanonicznej teorii

$b_{0k} = b_k$ — " — " ——

} lokalna teoria pola + kwantyzacja

spin $S=0$ $\quad \Psi(x)\, A(x)\, \phi(x)$ $\quad$ spiny $\frac{1}{2}$ i 1

RGPEP

$a_s = U_s \, a_0 \, U_s^\dagger$, te same k , $U_s U_s^\dagger = U_s^\dagger U_s = 1$.

23.

$a_{sk} = U_s \, a_{0k} \, U_s^\dagger$.

$\hat{P}^- = \hat{P}_s^-(a_s, b_s) = U_s \, \hat{P}_s^-(a_0, b_0) \, U_s^\dagger$

współczynniki
zależne od s
stałe operatory a_0 i b_0.

$\hat{P}_s^-(a_0, b_0) = U_s^\dagger \hat{P}^- U_s$ $\hat{P}^-$ nie zależy od wyboru s.

$\frac{d}{ds} \hat{P}_s^-(a_0, b_0) = \left[G_s , \hat{P}_s^-(a_0, b_0) \right]$, $G_s = - U_s^\dagger \frac{d}{ds} U_s = ?$

$U_s^{\dagger\prime} U_s + U_s^\dagger U_s' = 0$

$A_s = U_s^\dagger A_0 U_s$

$$A_s' = U_s^{\dagger\prime} A_0 U_s + U_s^\dagger A_0 U_s'$$
$$= U_s^{\dagger\prime} U_s U_s^\dagger A_0 U_s + $$
$$+ U_s^\dagger A_0 U_s U_s^\dagger U_s'$$
$$= - U_s^\dagger U_s' A_s + A_s U_s^\dagger U_s'$$
$$= \left[- U_s^\dagger U_s' , A_s \right]$$

$$U_s = T\, e^{-\int_0^s d\tilde{s}\, G_{\tilde{s}}}\,,$$ T uporządkowanie w s "chronologiczne". ↳ "rozmiarologiczne"

24.

$$t = s^4$$

$$\frac{d}{dt}\hat{P}^-_t(a_0, b_0) = \left[\hat{G}_t(a_0,b_0),\ \hat{P}^-_t(a_0,b_0)\right]$$ równanie RGPEP

$$\hat{G}_t(a_0,b_0) = \left[\hat{P}^-_f(a_0,b_0),\ \hat{P}^-_{tP}(a_0,b_0)\right]$$

$$\hat{P}^-_f = \int [k] \left(\frac{k^{\perp 2}+\mu^2}{k^+}\, a^\dagger_{0k} a_{0k} + \frac{k^{\perp 2}+\nu^2}{k^+}\, b^\dagger_{0k} b_{0k} \right)$$ f= free

Wzory (9) i (10): $\quad q \sim a \sim b$

$$\hat{P}^{\sim}_{t}(a_0, b_0)_{q_0} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_n} C_t(i_1,\dots,i_n)\, q^{+}_{0i_1} q^{+}_{0i_2} \dots q_{0i_{n-1}} q_{0i_n}$$

25.

$$\hat{P}^{-}_{tP}(a_0, b_0)_{q_0} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{i_1,\dots,i_n} C_t(i_1,\dots,i_n) \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} p^{+}_{i_k}\right)^2 q^{+}_{0i_1} q^{+}_{0i_2} \dots q_{0i_{n-1}} q_{0i_n}$$

Dodanie $n=1$ oznacza dodanie zewnętrznego pola.
(przypadek spora teorii podstawowej)

$\hat{P}^{-}_{tP}$ występuje w $\left[\hat{P}^{-}_{f1}\, \hat{P}^{-}_{tP}\right]$, więc wyrazy z $n=2$ nie wchodzą do równania.

$$\hat{P}^{-}_{tP}(a_0, b_0) = \int [k] \left[A_s(k) \cdot a^{+}_{0k} a_{0k} + B_s(k) \cdot b^{+}_{0k} b_{0k} + C_s(k)\left(b^{+}_{0k} a_{0k} + a^{+}_{0k} b_{0k}\right)\right] k^{+2}$$

$$\hat{P}^-_0(a_0, b_0) \overset{(33)}{=} \int [k] \left[\frac{k^{\perp 2}+\mu^2}{k^+} a^+_{0k} a_{0k} + \frac{k^{\perp 2}+\nu^2}{k^+} b^+_{0k} b_{0k} + \frac{m^2}{k^+}\left(a^+_{0k} b_{0k} + b^+_{0k} a_{0k}\right)\right]$$

26.

$$\frac{d}{dt}\hat{P}^-_t(a_0, b_0) \overset{(32)}{=} \left[\left[\hat{P}^-_f(a_0, b_0), \hat{P}^-_{tP}(a_0, b_0)\right], \hat{P}^-_t(a_0, b_0)\right] \quad (*) \text{ r. RGPEP}$$

$$A_{tk} = \frac{k^{\perp 2}+\mu^2(t)}{k^+} \qquad B_{tk} = \frac{k^{\perp 2}+\nu^2(t)}{k^+} \qquad C_{tk} = \frac{m^2(t)}{k^+}$$

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} A'_{tk} = 2k^{+2}\left(A_{0k} - B_{0k}\right) C^2_{tk} \\ B'_{tk} = -2k^{+2}\left(A_{0k} - B_{0k}\right) C^2_{tk} \\ C'_{tk} = \left(-k^{+2}\right)\left(A_{0k} - B_{0k}\right)\left(A_{tk} - B_{tk}\right) C_{tk} \end{cases}$$

układów

tyle równań ile wyborów $k^+, \underbrace{k^1, k^2}_{k^\perp}$,

27.

k wypadu z równań', np. 3 równanie:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m^2(t)}{k^+}\right) = \left(-\cancel{k^{+2}}\right)\left(\frac{\cancel{k^{\perp 2}}+\mu^2}{\cancel{k^+}} - \frac{\cancel{k^{\perp 2}}+\nu^2}{\cancel{k^+}}\right)\left(\frac{\cancel{k^{\perp 2}}+\mu^2(t)}{\cancel{k^+}} - \frac{\cancel{k^{\perp 2}}+\nu^2(t)}{\cancel{k^+}}\right)\frac{m^2(t)}{k^+}$$

podobnie z A i B. $\quad ' = \frac{d}{dt}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mu^2(t) & m^2(t) \\ m^2(t) & \nu^2(t) \end{bmatrix}'}_{P_t'} = \left[\left[\underbrace{\begin{bmatrix} \mu^2 & 0 \\ 0 & \nu^2 \end{bmatrix}}_{P_f}, \underbrace{\begin{bmatrix} 0, & m^2(t) \\ m^2(t), & 0 \end{bmatrix}}_{P_{tP}}\right], \underbrace{\begin{bmatrix} \mu^2(t), & m^2(t) \\ m^2(t), & \nu^2(t) \end{bmatrix}}_{P_t}\right]$$

28.

$$\mu^2(t) = \frac{1}{2}(\mu^2+\nu^2) + \frac{1}{2}\,\delta\mu^2(t)$$

$$\nu^2(t) = \frac{1}{2}(\mu^2+\nu^2) - \frac{1}{2}\,\delta\mu^2(t)$$

$$\delta\mu^2(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ \mu^2-\nu^2}}{\delta\mu^2}(0)\;\frac{\cosh x(t) + \varepsilon \sinh x(t)}{\cosh x(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sinh x(t)}$$

$$m^2(t) = \underset{\substack{\uparrow \\ m^2}}{m^2}(0)\;\frac{1}{\cosh x(t) + \frac{1}{\varepsilon}\sinh x(t)}$$

$$x(t) = \delta\mu^2(0)\cdot\delta m^2\cdot t\,, \qquad \delta m^2 = m_1^2 - m_2^2\,, \qquad \varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{2m^2}{\mu^2-\nu^2}\right)^2}$$

$$\mu^2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} m_1^2 \qquad a_{tk} = \cos\varphi_t \cdot a_{0k} - \sin\varphi_t \cdot b_{0k}$$

29.

$$\nu^2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} m_2^2 \qquad b_{tk} = \sin\varphi_t \cdot a_{0k} + \cos\varphi_t \cdot b_{0k}$$

$$m^2(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$\xi = \xi(a_{\infty k}) \longleftrightarrow \xi$ kwanty o masie m_1

$\zeta = \zeta(b_{\infty k}) \longleftrightarrow \zeta$ kwanty o masie m_2

$$\hat{P}^-_\infty(a_\infty, b_\infty) = \hat{P}^-\left[\mathcal{L}(\xi, \zeta)\right]_{m_1\ m_2}$$

RGPEP we frontowej formie dynamiki

odtwarza standardowy wynik, ale:

1) bez rozwiązania struktury próżni;

2) bez zgadywania φ i χ, lub π_φ i π_χ;

3) bez "przekwantowania", żeby pozbyć się b^+a^+;

4) w sposób nie-zależny od szczegółów teorii.

ZAPROSZENIE: zastosujmy RGPEP do QED, QCD, itp.

$\longrightarrow$ Phys. Rev. D85, 125018 (2012) referencje tamże.