

Ładunek w centralnym polu elektromagnetycznym

Piotr Migdał

3 kwietnia 2006

Spis treści

1	Zadanie o dwóch ładunkach w polu magnetycznym	2
1.1	Prawo zachowania zmodyfikowanego momentu pędu	2
1.2	Zakaz ucieczki	3
2	Liniowe pole elektryczne	4
2.1	$g + \psi^2 < 0$: wykładniczo, czasem wręcz dążąco	5
2.1.1	Hiperboliczne ruchy	7
2.1.2	Chce dojść, a nie może	8
2.2	$g + \psi^2 = 0$: proste, nieskomplikowane ruchy	8
2.3	$g + \psi^2 > 0$: gdzie rosną zębátky... i kwiaty	10
2.3.1	Koło, a raczej koła	10
2.3.2	Kwiatek	11
2.3.3	Zębátky na zewnątrz i do środka	11
2.3.4	Wianek	12
2.4	Okresowość	14

1 Zadanie o dwóch ładunkach w polu magnetycznym

Swego czasu było takie zadanie na Międzynarodowej Olimpiadzie Fizycznej ¹:

W przestrzeni są dwa ciała: nieruchome, o ładunku Q oraz ruchome o ładunku q oraz masie m . Na początku znajdują się w stanie względnego spoczynku, we wzajemnej odległości r_0 . Całość jest w jednorodnym polu magnetycznym, prostopadłym do płaszczyzny zawierającej oba ładunki.

Jeśli Q i q są tego samego znaku, czy m ucieknie do nieskończoności?

By rozwiązać to zadanie, wystarczy znaleźć odpowiednie prawo zachowania broniące takiej ucieczki. Jakie? Dla ciał, na które działa tylko tylko siła centralna, można wyprowadzić zasadę zachowania momentu pędu. W naszym przypadku dochodzi jeszcze siła magnetyczna, która zależy nie od położenia, ale od prędkości. Okazuje się jednak, że i tu nie jesteśmy bezradni.

W obrębie całej pracy pomijamy zjawisko wypromieniowywania energii przez przyspieszający ładunek.

1.1 Prawo zachowania zmodyfikowanego momentu pędu

Być może sposobów rozwiązania tego zadania jest więcej, ale jeden jest wyjątkowo owocny. Nie chcemy ani zamachać sprawą rękami, ani zaliczyć się na śmierć. Najwygodniej będzie przejść do układu biegunowego, gdzie wektor radialny (\vec{e}_r , wzdłuż promienia) oraz transwersalny (\vec{e}_ϕ , prostopadły do promienia) wyglądają tak

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos(\phi) \vec{e}_x + \sin(\phi) \vec{e}_y \\ \vec{e}_\phi &= -\sin(\phi) \vec{e}_x + \cos(\phi) \vec{e}_y .\end{aligned}$$

Kropka nad symbolem oznacza pochodną po czasie owego „podkropkowego czegoś” (rzecz dla leniwych, których męczy wypisanie $\frac{d}{dt}$). Gdy tych kropek jest więcej, mamy do czynienia z pochodną rzędu liczebności kropek. Bez wysiłku dostajemy pochodne wektorów po czasie

$$\begin{aligned}\dot{\vec{e}}_r &= \dot{\phi} \vec{e}_\phi \\ \dot{\vec{e}}_\phi &= -\dot{\phi} \vec{e}_r .\end{aligned}$$

Policzmy pierwszą i drugą pochodną wektora położenia po czasie

$$\begin{aligned}\vec{r} &= r \vec{e}_r , \\ \dot{\vec{r}} &= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi , \\ \ddot{\vec{r}} &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi}) \vec{e}_\phi .\end{aligned}\tag{1}$$

Całkowite przyspieszenie $\ddot{\vec{r}}$ możemy rozbić na dwa przyczynki — $\ddot{\vec{r}}_1$ pochodzący od siły centralnej (a tym samym równoległy do \vec{e}_r) oraz $\ddot{\vec{r}}_2$, wynikający z działania siły Lorentza. Zajmiemy się tym drugim

$$\begin{aligned}m \ddot{\vec{r}}_2 &= q (\dot{\vec{r}} \times B) , \\ \ddot{\vec{r}}_2 &= \frac{qB}{m} (-r \dot{\phi} \vec{e}_r + \dot{r} \vec{e}_\phi) .\end{aligned}\tag{2}$$

Do lewej strony (1) podstawiamy $\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_1 + \ddot{\vec{r}}_2$, po czym korzystamy z (2). Z tak spreparowanego równania wyciągamy składową \vec{e}_ϕ

$$\frac{qB}{m} \dot{r} = 2\dot{r} \dot{\phi} + r \ddot{\phi} .$$

¹zadanie z MOF — jeśli wpadnie to w ręce kogoś znajdującego się na zadaniach, proszę podać „czy i na której”; swoją drogą całkiem możliwe, że to tylko „produkt na bazie składników naturalnych”

Co z tym robimy? Przenosimy wyrazy na jedną stronę, po czym całość mnożymy przez r i, na co podświadomie szczerzyliśmy zęby, całkujemy po czasie

$$\begin{aligned} 0 &= 2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} - \frac{qB}{m}r\dot{r}, \\ 0 &= \int \left(2r\dot{r}\dot{\phi} + r^2\ddot{\phi} \right) dt - \int \frac{qB}{m}r\dot{r} dt, \\ \text{const} &= r^2\dot{\phi} - \frac{qB}{2m}r^2. \end{aligned}$$

Dla pewnej przejrzystości prędkość transwersalną oznaczmy przez $v_\phi := r\dot{\phi}$, a całość przemnożmy przez masę „łuznego” ładunku m . Stałą ($m \text{ const}$) oznaczmy jako \mathcal{M} , otrzymując

$$\mathcal{M} = m v_\phi r - \frac{qB}{2} r^2. \quad (3)$$

Tym samym dostaliśmy coś ładząco przypominające zasadę zachowania momentu pędu w ruchu pojedynczego ładunku. Co więcej, owa stała \mathcal{M} (nawzimy ją „zmodyfikowanym momentem pędu”) składa się z zwykłej zasady zachowania pędu minus pewnej poprawki wynikającej obecności pola magnetycznego.

Pytanie 1 *Czy suma zmodyfikowanych momentów pędu dwóch nieoddziaływujących ze sobą ciał (oprócz chwili natychmiastowego zderzenia), przy dozwolonym przepływie ładunku, jest stała?*

W ogólniejszym przypadku możemy zapisać

$$\mathcal{M} = m v_\phi r - \int q(r) B(r) r dr,$$

przyjmując zero za stałą całkowania (z tego prostego powodu, że owa stała po prostu wejdzie do \mathcal{M}),

„No dobra, pole magnetyczne może zależeć od odległości, ale moim zdaniem $q(r)$ wygląda nieco choro...” Czyżby? A gdyby wziąć uziemiony metalowy krążek, na którego powierzchni indukuje się ładunek?

Pytanie 2 (dla dociekliwych) *Jaka jest odpowiedź na Pytanie 1 w uogólnionym przypadku?*

1.2 Zakaz ucieczki

Zabawiliśmy się teorią, wróćmy do zadania. Mamy rozstrzygnąć, czy ów mały ładunek ucieknie do nieskończoności. Zanim udzielimy odpowiedzi, trzeba zastanowić się, co to znaczy „uciec do nieskończoności”? Sądzę, że najsensowniej przyjąć, że jest to

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \infty,$$

lub, formułując to samo innymi słowami: nie ważne jak duży weźmiemy promień r , jest takie czas t , po którym ładunek już nigdy sięna taką odległość nie zbliży.

Pokażemy, że w naszym przypadku tak być nie może.

Równanie na nasz zmodyfikowany moment pędu (3) dzielimy obustronnie przez r , po czym przenosimy cześć „klasyczną” na drugą stronę

$$\frac{qB}{2}r = m v_\phi - \frac{\mathcal{M}}{r}.$$

Między innymi by pozbyć się problemów ze znakami (zarówno q , B , v_ϕ , jak i \mathcal{M} mogą być dodatnie jak i ujemne), traktujemy obie strony wartością bezwzględną

$$\left| \frac{qB}{2}r \right| = \left| m v_\phi - \frac{\mathcal{M}}{r} \right| \leq |m v_\phi| + \left| \frac{\mathcal{M}}{r} \right|. \quad (4)$$

Co z tym możemy dalej zrobić? Oczywiście oszacować z góry.

Składowa prędkości ma długość nie większą o całkowitej prędkości, czyli $|v_\phi| \leq |v|$. Dalej, w potencjale ładunku punktowego (t.j. typu $\frac{1}{r}$) całkowita energia jest skończona, a zatem i moduł prędkości jest ograniczony, czyli $|v| < |v_{\max}|$.

Z zasady zachowania energii oraz warunków początkowych wynika, że $r \geq r_0$, czyli $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{r_0}$.

Po zastosowaniu tych dwóch spostrzeżeń do oszacowania (4) otrzymujemy

$$\left| \frac{qB}{2} r \right| < |m v_{\max}| + \left| \frac{\mathcal{M}}{r_0} \right| ,$$

$$|r| < \left| \frac{2}{qB} \right| \left(|m v_{\max}| + \left| \frac{\mathcal{M}}{r_0} \right| \right) .$$

Zatem jak bardzo by chciał, ten ładunek nie ucieknie do nieskończoności, będąc uwięziony w kuli o pewnym promieniu.

Należy dodać, że to szacowanie nie jest dokładne. By uzyskać maksymalne r , czego my nie będziemy tu robić, trzeba zabrać się nieco inaczej — zauważyć, że gdy ładunek zawraca nie ma prędkości radialnej (a zatem $v_\phi = v$), po czym rozwiązać układ równań składający się z zasad zachowania energii i \mathcal{M} .

Warto podkreślić, że „nieuciekanie” zależy zarówno od parametrów, jak i początkowego położenia oraz prędkości. Przez parametry broniące ucieczki rozumiemy takie zastawy ładunku $q(r)$, pola magnetycznego $B(r)$ i energii potencjalnej $E(r)$, że nie ma takich warunków początkowych, przy których ładunek ucieka do nieskończoności.

Pytanie 3 *Spróbuj (przyjmując q i B za stałe) znaleźć warunek na to, że potencjał $E(r)$ broni ucieczki.*

2 Linowe pole elektryczne

Rozważmy teraz pole elektryczne o wartości wprost proporcjonalnej do odległości. Siła elektryczna działająca na wędrujący ładunek jest, tym samym, w postaci

$$\vec{F}_{el} = -k q \vec{r} .$$

Z kolei siła Lorentz’a „jak zwykle” wynosi

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \times \vec{B} .$$

Dlaczego zajmujemy się takim, a nie innym, przypadkiem? Po pierwsze nie dość, że da się go rozwiązać analitycznie, to jeszcze rozwiązania nie przerażają swoją postacią. Po drugie, w wielu praktycznych przypadkach można przyjąć pole magnetyczne za stałe, a siłę za zmieniającą się liniowo z odległością.

By zabrać się za sprawę, zapisujemy równania ruchu we współrzędnych kartezjańskich

$$0 = \ddot{x} + g x + 2 \psi \dot{y} \tag{5}$$

$$0 = \ddot{y} + g y - 2 \psi \dot{x} , \tag{6}$$

gdzie $g := \frac{q}{m} k$, $\psi := \frac{1}{2} \frac{q}{m} B$.

Rozwiążmy powyższy układ równań różniczkowych. W tym celu różniczkujemy (6) i wymnażamy przez czynnik -2ψ , dostając

$$0 = -2 \psi \ddot{y} - 2 g \psi \dot{y} + 4 \psi^2 \ddot{x} ,$$

po czym podstawiamy do niego wyraz $2 \psi \dot{y}$ wyciągnięty z (5) otrzymując

$$0 = \ddot{x} + (2 g + 4 \psi^2) \ddot{x} + g^2 x .$$

Spodziewamy się rozwiązania w postaci kombinacji liniowej wyrazów typu $e^{\lambda t}$, więc układamy i rozwiązujemy tzw. równanie charakterystyczne [1]

$$0 = \lambda^4 + (2 g + 4 \psi^2) \lambda^2 + g^2 .$$

Mamy przed sobą trójmian kwadratowy zmiennej λ^2 , którego rozwiązanie warto nieco przekształcić

$$\begin{aligned}\lambda^2 &= \frac{-2g - 4\psi^2 \mp \sqrt{(2g + 4\psi^2)^2 - 4g^2}}{2} \\ &= -\left(\psi^2 \pm 2\psi\sqrt{g + \psi^2} + g + \psi^2\right) \\ &= -\left(\psi \pm \sqrt{g + \psi^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Zatem

$$\lambda = \pm i\psi \pm i\sqrt{g + \psi^2}, \quad (7)$$

gdzie i jest jednostką urojoną.

Rozdzielmy rozwiązania na trzy przypadki, w zależności od znaku wyrażenia $g + \psi^2$.

2.1 $g + \psi^2 < 0$: wykładniczo, czasem wręcz dążąco

Dla pól silnie odpychających, czyli takich, że $-g > \psi^2$ każde z czterech różnych rozwiązań (7) równania charakterystycznego jest zespolone i ma zarówno część rzeczywistą jak i urojoną

$$\lambda = \pm\gamma \pm i\psi, \quad (8)$$

gdzie $\gamma := \sqrt{-g - \psi^2}$ oraz oczywiście ψ to liczby rzeczywiste.

Ogólne rozwiązanie $x(t)$ układu równań różniczkowych (5)–(6), przy powyższym podstawieniu (8), to

$$\begin{aligned}x(t) &= C_1 e^{(+\gamma+i\psi)t} + C_2 e^{(+\gamma-i\psi)t} + C_3 e^{(-\gamma+i\psi)t} + C_4 e^{(-\gamma-i\psi)t} \\ &= e^{\gamma t} (C_1 e^{i\psi t} + C_2 e^{-i\psi t}) + e^{-\gamma t} (C_3 e^{i\psi t} + C_4 e^{-i\psi t}).\end{aligned}$$

Skoro interesuje nas tylko rzeczywista funkcja $x(t)$, równoważnym wzorem (bo $e^{i\psi t} = \cos(\psi t) + i \sin(\psi t)$) jest

$$x(t) = A e^{\gamma t} \cos(\psi t + \alpha) + B e^{-\gamma t} \cos(\psi t + \beta), \quad (9)$$

dla pewnych rzeczywistych współczynników A, B, α i β .

By znaleźć w/w współczynniki, należy znać warunki początkowe oraz funkcje $x(t)$ i $y(t)$ wraz z ich pierwszymi pochodnymi po czasie. Nie stanowi to jednak dla nas problemu — bierzemy z (6), w którym to \ddot{y} podstawiamy ze zróżniczkowanego (5)

$$\begin{aligned}y &= \frac{2\psi}{g} \dot{x} + \frac{1}{g} \ddot{y} \\ &= \frac{2\psi}{g} \dot{x} + \frac{1}{2g\psi} \dot{\dot{x}} + \frac{1}{2\psi} \dot{x} \\ &= \frac{1}{2g\psi} ((4\psi^2 + g)\dot{x} + \dot{\dot{x}}).\end{aligned} \quad (10)$$

Czeka nas nieprzyjemne technicznie różniczkowanie funkcji $x(t)$. By nie zamećtać się ponad miarę (co nie oznacza, bynajmniej, wymigania się od wysiłku technicznego), zajmijmy się tylko pierwszym członem wzoru (9)

$$\tilde{x}(t) := e^{\gamma t} \cos(\psi t + \alpha).$$

Do dzieła:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{x}} &= e^{\gamma t} (\gamma \cos(\psi t + \alpha) - \psi \sin(\psi t + \alpha)), \\ \ddot{\tilde{x}} &= e^{\gamma t} ((\gamma^2 - \psi^2) \cos(\psi t + \alpha) - 2\gamma\psi \sin(\psi t + \alpha)), \\ \dot{\dot{\tilde{x}}} &= e^{\gamma t} (\gamma(\gamma^2 - 3\psi^2) \cos(\psi t + \alpha) + \psi(\psi^2 - 3\gamma^2) \sin(\psi t + \alpha)).\end{aligned}$$

Teraz wyliczmy $\tilde{y}(t)$, zdefiniowaną przez $\tilde{x}(t)$, analogicznie jak $y(t)$ przez $x(t)$ we wzorze (10),

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2g\psi} e^{\gamma t} (\gamma (\gamma^2 - 3\psi^2 + 4\psi^2 + g) \cos(\psi t + \alpha) + \psi (\psi^2 - 3\gamma^2 - 4\psi^2 + g) \sin(\psi t + \alpha)) .$$

By uprościć wyrażenie, nie obejdziemy się bez przypomnienia sobie, jak wyrazić γ przez g i ψ — sięgnijemy do wzoru definiującego (8), z którego wynika, że $\gamma = \sqrt{-g - \psi^2}$. Teraz już z górki

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \frac{1}{2g\psi} e^{\gamma t} (\gamma (-g - \psi^2 - 3\psi^2 + 4\psi^2 + g) \cos(\psi t + \alpha) + \psi^2 (\psi^2 + 3g + 3\psi^2 - 4\psi^2 + g) \sin(\psi t + \alpha)) \\ &= e^{\gamma t} \sin(\psi t + \alpha) . \end{aligned}$$

Trzeba uczciwie przyznać, że dużo ładniej, niż by można się spodziewać. Dobrze, ale chcemy jednak przejść do $y(t)$. Zwróćmy uwagę, że stosowaliśmy tylko operacje liniowe (jaką jest różniczkowanie) oraz, że drugi składnik sumy w $x(t)$ jest tej samej postaci co pierwszy, jeśli tylko zastosujemy podstawienia $A \rightarrow B$, $\gamma \rightarrow -\gamma$ i $\alpha \rightarrow \beta$. Czyli skoro

$$x(t) = A \tilde{x}(t) + B \tilde{x}_{\gamma \rightarrow -\gamma, \alpha \rightarrow \beta}(t) ,$$

to

$$\begin{aligned} y(t) &= A \tilde{y}(t) + B \tilde{y}_{\gamma \rightarrow -\gamma, \alpha \rightarrow \beta}(t) , \\ y(t) &= A e^{\gamma t} \sin(\psi t + \alpha) + B e^{-\gamma t} \sin(\psi t + \beta) . \end{aligned}$$

Dobrze, znamy już postać funkcji $x(t)$ i $y(t)$. Czas wyznaczyć stałe w oparciu o warunki brzegowe. Dla $t = 0$ mamy układ równań

$$x_0 = A \cos \alpha + B \cos \beta \tag{11}$$

$$\dot{x}_0 = A (\gamma \cos \alpha - \psi \sin \alpha) + B (-\gamma \cos \beta - \psi \sin \beta)$$

$$y_0 = A \sin \alpha + B \sin \beta \tag{12}$$

$$\dot{y}_0 = A (\gamma \sin \alpha + \psi \cos \alpha) + B (-\gamma \sin \beta + \psi \cos \beta) ,$$

gdzie x_0 i y_0 to położenia początkowe, a \dot{x}_0 i \dot{y}_0 — prędkości początkowe. Jeśli chcemy znać ogólne rozwiązania, musimy dopuścić wszystkie możliwe kombinacje tych warunków początkowych. Jednak chwileczkę — możemy stwierdzić, że wystarczą nam wyniki z dokładnością co do obrotu oraz punktu startu. W takim razie, bez straty ogólności, niech $y_0 = 0$ oraz $x_0 \geq 0$ (i taką konwencję już utrzymujemy do końca pracy).

Po chwili znajdujemy, że

$$A^2 = \frac{(\dot{x}_0 + \gamma x_0)^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}{4\gamma^2}$$

$$B^2 = \frac{(\dot{x}_0 - \gamma x_0)^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}{4\gamma^2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}_0 - \psi x_0}{\dot{x}_0 + \gamma x_0}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\dot{y}_0 - \psi x_0}{\dot{x}_0 - \gamma x_0} .$$

Rozbijmy rozwiązanie na dwa przypadki:

- Ładunek osiąga minimalną odległość od środka. Jeśli położenie ma ekstremum to prędkość wzdłuż promienia się zeruje. Jeśli zaś ładunek przechodzi przez środek — też wystarczy rozważyć tylko jedną składową prędkości. Zatem w obu podprzypadkach przyjmujemy $\dot{x}_0 = 0$.
- Ładunek dąży do pewnej minimalnej długości, nigdy jej nie osiągnąjąc.

2.1.1 Hiperboliczne ruchy

Zacznijmy od związku między kątami

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\dot{y}_0 - \psi x_0}{\gamma x_0} = -\operatorname{tg} \beta ,$$

dającego związek $\beta = -\alpha$ lub $\beta = \pi - \alpha$. Można w prawdzie bawić się dwoma różnymi możliwościami, ale po co? Zauważmy, że kąt β występuje tylko w środku sinusa i kosinusa, przed którym stoi współczynnik B . A skoro π tylko zmienia znak powyższych funkcji, bez straty jakiegokolwiek ogólności weźmy $\beta = -\alpha$, ewentualnie rzucając minusa przed B .

Kwadraty A i B są równe

$$A^2 = \frac{\gamma^2 x_0^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}{4\gamma^2} = B^2 ,$$

jednak w tej chwili niewiele wiemy o ich znakach. Spójrzmy jednak na równanie (12) mówiące o położeniu początkowym. Wiemy już, że $\beta = -\alpha$, oraz $|B| = |A|$. Szybko spostrzegamy, że by $y_0 = 0$, musimy mieć $A = B$.

Przyjmujemy, że $-\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, co najwyżej odbije się na znaku przy A . Pamiętając, że $\gamma > 0$ oraz $x_0 \geq 0$ otrzymujemy

$$A = \frac{\sqrt{\gamma^2 x_0^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}}{2\gamma} .$$

Dobrze, dostaliśmy poszukiwane rozwiązanie

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{\gamma^2 x_0^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}}{2\gamma} (e^{\gamma t} \cos(\psi t + \alpha) + e^{-\gamma t} \cos(\psi t - \alpha)) \\ y(t) &= \frac{\sqrt{\gamma^2 x_0^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}}{2\gamma} (e^{\gamma t} \sin(\psi t + \alpha) + e^{-\gamma t} \sin(\psi t - \alpha)) . \end{aligned}$$

Właściwie mogła by nas taka postać zadowolić, ale właściwie czemu by się nie pobawić przy pomocy pary tożsamości

$$\begin{aligned} \cos(\psi t + \alpha) &= \cos(\psi t) \cos(\alpha) - \sin(\psi t) \sin(\alpha) \\ \sin(\psi t + \alpha) &= \sin(\psi t) \cos(\alpha) + \cos(\psi t) \sin(\alpha) , \end{aligned}$$

i drugiej pary z zamienionym α na $-\alpha$. W tym momencie kusi by nieco uprościć wyrażenie odwołując się do funkcji hiperbolicznych wyglądających (a właściwie definiowanych) następująco

$$\begin{aligned} \cosh(\gamma t) &= \frac{1}{2} (e^{\gamma t} + e^{-\gamma t}) \\ \sinh(\gamma t) &= \frac{1}{2} (e^{\gamma t} - e^{-\gamma t}) . \end{aligned}$$

No i co dostaliśmy? Wygląda to w każdym razie następująco

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{\gamma^2 x_0^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}}{\gamma} (\cosh(\gamma t) \cos(\psi t) \cos(\alpha) - \sinh(\gamma t) \sin(\psi t) \sin(\alpha)) \\ y(t) &= \frac{\sqrt{\gamma^2 x_0^2 + (\dot{y}_0 - \psi x_0)^2}}{\gamma} (\cosh(\gamma t) \sin(\psi t) \cos(\alpha) + \sinh(\gamma t) \cos(\psi t) \sin(\alpha)) . \end{aligned}$$

Uczciwie mówiąc, jest rzeczą kontrowersyjną, czy dostaliśmy ładniejszą postać. Po prostu inną.

Spójrzmy jeszcze na szczególny przypadek, mianowicie start w środku. Do postulowanych warunków dochodzi zatem jeden — $x_0 = 0$. Ze sprawdzenia (11) błyskawicznie otrzymujemy $\alpha = \frac{\pi}{2}$, co nam w efekcie daje rozwiązanie

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\dot{y}_0}{\gamma} \sinh(\gamma t) \sin(\psi t) \\ y(t) &= \frac{\dot{y}_0}{\gamma} \sinh(\gamma t) \cos(\psi t) , \end{aligned}$$

czyli de facto spiralę „sinuso-hiperboliczną”

$$r(\theta) = \frac{\dot{y}_0}{\gamma} \sinh\left(\frac{\gamma}{\psi}\theta\right),$$

przy czym θ to kąt mierzony od pionu.

2.1.2 Chce dojść, a nie może

Zbadajmy, kiedy tak się dzieje, że ładunek nie osiąga skończonej granicy. W tym celu policzmy kwadrat odległości od środka układu dla dowolnych współczynników (oprócz postulowanego wcześniej $y_0 = 0$)

$$\begin{aligned} r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) &= \left(A e^{\gamma t} \cos(\psi t + \alpha) + B e^{-\gamma t} \cos(\psi t + \beta)\right)^2 + \left(A e^{\gamma t} \sin(\psi t + \alpha) + B e^{-\gamma t} \sin(\psi t + \beta)\right)^2 \\ &= A^2 e^{2\gamma t} + B^2 e^{-2\gamma t} + 2AB(\cos(\psi t + \alpha)\cos(\psi t + \beta) + \sin(\psi t + \alpha)\sin(\psi t + \beta)). \end{aligned}$$

Wyrażenie trygonometryczne za $2AB$ może wydawać się „tajemnicze i niepokojące”, jednak tylko z pozoru. Stosując znaną tożsamość $\cos(x - y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$ możemy zwinąć je do czegoś tak miłego jak $\cos(\beta - \alpha)$, które to w szczególności nie zależy od czasu. Teraz szukamy minimum $r^2(t)$

$$0 = \frac{dr^2(t)}{dt} = 2\gamma A^2 e^{2\gamma t} - 2\gamma B^2 e^{-2\gamma t}.$$

Mnożymy stronami, tak by pozostał tylko jeden wyraz wykładniczy, po czym szukamy rozwiązania

$$\begin{aligned} 2\gamma A^2 e^{4\gamma t} &= 2\gamma B^2 \\ t &= \frac{1}{2\gamma} \ln \left| \frac{A}{B} \right|. \end{aligned}$$

Niby fajne, ale my zakładaliśmy nie istnienie takiego skończonego rozwiązanie. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy $A = 0$ lub $B = 0$. Przypadki te różnią się tylko obróceniem czasu, więc przyjmijmy że $B = 0$. Z równania na B otrzymujemy związki

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= \gamma x_0 \\ \dot{y}_0 &= \psi x_0. \end{aligned}$$

Gdy tylko podstawimy je do reszty równań, otrzymamy

$$\begin{aligned} A &= x_0 \\ \sin \alpha = \sin \beta &= 0. \end{aligned}$$

Tym samym nasze końcowe równanie przyjmuje niezwykle prostą i ładną postać spirali logarytmicznej

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 e^{\gamma t} \cos(\psi t) \\ y(t) &= x_0 e^{\gamma t} \sin(\psi t), \end{aligned}$$

czyli

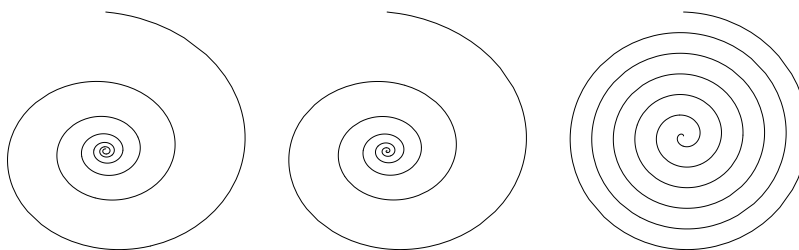
$$r(\theta) = x_0 e^{\frac{\gamma}{\psi}\theta}.$$

Pytanie 4 Zarówno gdy ciało przechodzi przez środek jak i tylko do niego dąży, $\mathcal{M} = 0$. Ale jak w obu przypadkach wygląda sprawa z energią?

2.2 $g + \psi^2 = 0$: proste, nieskomplikowane ruchy

W tym, poniekąd granicznym, przypadku istnieje tylko jedno rozwiązanie równania „na lambdę”. Jest nim $\lambda = i\psi$. Rozwiązaniem układu równań jest tym razem wyrażenie w postaci

$$x(t) = C_1 e^{i\psi t} + C_2 e^{-i\psi t} + C_3 t e^{i\psi t} + C_4 t e^{-i\psi t}.$$



Rysunek 1: Spirale. Ta z lewej to logarytmiczna, w środku — „sinuso-hiperboliczna”, z prawej — „liniowa”. Pierwsze dwie różnią się tylko nieznacznie.

Jak poprzednio, zakładając że funkcja $x(t)$ jest rzeczywista, przechodzimy do przyjemniejszego wzoru

$$x(t) = A \cos(\psi t + \alpha) + B t \cos(\psi t + \beta) .$$

Jak, nauczeni poprzednim doświadczeniem, możemy domniemywać, że wzór na współrzędna y jest podobny:

$$y(t) = A \sin(\psi t + \alpha) + B t \sin(\psi t + \beta) .$$

Swoje przypuszczenie nietrudno udowodnić bezpośrednim rachunkiem (który to każdy zainteresowany może wykonać na własne ryzyko).

Czas wyznaczyć stałe. Zacznijmy od zapisania warunków początkowych

$$\begin{aligned} x_0 &= A \cos(\alpha) \\ \dot{x}_0 &= -A\psi \sin(\alpha) + B \cos(\beta) \\ y_0 &= A \sin(\alpha) \\ \dot{y}_0 &= A\psi \cos(\alpha) + B \sin(\beta) . \end{aligned}$$

To, co nam teraz pozostaje, to znaleźć w miarę ogólne rozwiązania. Tak jak poprzednio, nie interesuje nas obrót (niech tym samym $y_0 = 0$, $x_0 \geq 0$) oraz punkt startu. Bez straty ogólności, zacznijmy od punktu najmniejszego zbliżenia, czyli niech $\dot{x}_0 = 0$.

Z warunków początkowych dostajemy następujące zależności

$$\begin{aligned} \dot{y}_0 - \psi x_0 &= B \sin(\beta) \\ 0 &= B \cos(\beta) \\ 0 &= A \sin(\alpha) \\ x_0 &= A \cos(\alpha) . \end{aligned}$$

Dostajemy z nich w szczególności $\alpha = 0$, $A = x_0$, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $B = \dot{y}_0 - \psi x_0$. Zatem rozwiązaniem jest

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\psi t) - (\dot{y}_0 - \psi x_0)t \sin(\psi t) \\ y(t) &= x_0 \sin(\psi t) + (\dot{y}_0 - \psi x_0)t \cos(\psi t) . \end{aligned}$$

Całkiem prosto wyłowić dwa dość szczególne przypadki:

- Gdy $x_0 = 0$ mamy do czynienia ze spiralą „liniową”, tzn. promień rośnie wprost proporcjonalnie do kąta obrotu.

$$r(\theta) = \frac{\dot{y}_0}{\psi} \theta .$$

- Gdy $\dot{y}_0 = \psi x_0$, suma siły centralnej i magnetycznej staje się siłą dośrodkową, a więc ładunek krąży po okręgu. Na marginesie, całkiem nudnawo.

2.3 $g + \psi^2 > 0$: gdzie rosną zębatki... i kwiaty

Wreszcie dochodzimy do takich parametrów, przy których wszystkie „lambdy” są czysto urojone. Rozwiązaniem tym razem jest

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} + C_3 e^{i\Omega t} + C_4 e^{-i\Omega t} ,$$

przy czym

$$\begin{aligned}\omega &:= \psi + \sqrt{g + \psi^2} , \\ \Omega &:= \psi - \sqrt{g + \psi^2} .\end{aligned}$$

Co jest istotne dla dalszej fabuły, ω i Ω nie są wzajemnie symetryczne.

Jak za poprzednimi razami, przechodzimy do postaci trygonometrycznej:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + B \cos(\Omega t + \beta) \quad (13)$$

$$y(t) = A \sin(\omega t + \alpha) + B \sin(\Omega t + \beta) . \quad (14)$$

To, że w istocie $y(t)$ wygląda tak, a nie inaczej, pokazujemy bezpośrednim rachunkiem (nie aż takie bolesne). Należy zwrócić uwagę, że wybór ω i Ω jako częstości nie jest przypadkowy. Teoretycznie tak samo dobre $-\omega$ i Ω , ω i $-\Omega$, czy też $-\omega$ i $-\Omega$ wprowadzają zmianę znaku przy współczynnikach. Konkretniej: gdy użyjemy $-\omega$ zamiast ω , w funkcji $y(t)$ pojawi się $-A$ zamiast A . Analogicznie z $\pm\Omega$ i $\pm B$. Można wprawdzie twierdzić, że taka zmiana niczemu nie szkodzi (co, na marginesie, jest prawdą), jednak moje poczucie estetyki nie lubi, jak dla różnych g wzory wychodzą podobnie.

Do rzeczy, wypiszmy warunki początkowe:

$$\begin{aligned}x_0 &= A \cos(\alpha) + B \cos(\beta) \\ \dot{x}_0 &= -A\omega \sin(\alpha) - B\Omega \sin(\beta) \\ y_0 &= A \sin(\alpha) + B \sin(\beta) \\ \dot{y}_0 &= A\omega \cos(\alpha) + B\Omega \cos(\beta) .\end{aligned}$$

Tradycyjnie przyjmujemy bez jakiejś szczególnej straty ogólności, że $y_0 = 0$, $x_0 > 0$ i $\dot{x}_0 = 0$. Nie chcemy przecież mieć takich samych krzywych, tylko że zaczynających się w innym miejscu lub innym czasie.

Tymczasowo przyjmimy, że $A \neq 0$ i $B \neq 0$. Dość szybko otrzymujemy, że $\sin(\alpha) = 0$ i $\sin(\beta) = 0$. Możemy założyć, że $\alpha = \beta = 0$, dbając by odpowiednio dobrać znaki A i B . Bez szczególnie długiej czy uciążliwej walki dostajemy szukane współczynniki

$$\begin{aligned}A &= \frac{\dot{y}_0 - \Omega x_0}{\omega - \Omega} \\ B &= -\frac{\dot{y}_0 - \omega x_0}{\omega - \Omega} .\end{aligned}$$

Pobawmy się teraz szczególnymi przypadkami:

- koło,
- $x_0 = 0$ — kwiatek,
- $\dot{y}_0 = 0$ — koło zębate,
- pozostałe — wianek.

2.3.1 Koło, a raczej koła

Gdy któryś ze współczynników się zeruje, mamy do czynienia ze zwykłym kołem. Właściwie jedyną ciekawą rzeczą, jaka tu zachodzi jest fakt, że dla dwóch różnych prędkości mamy do czynienia z tą niezwykle prostą figurą geometryczną.

Niech $A = 0$, wtedy $\dot{y}_0 = \Omega x_0$, co daje $B = x_0$. I analogicznie: $B = 0$, wtedy $\dot{y}_0 = \omega x_0$, co daje $A = x_0$.

Czy nasuwają się jakieś interesujące spostrzeżenia? Otóż co najmniej jedno — zgodność, albo brak, kierunków ruchu obrotowego. ω jest zawsze większe od zera, natomiast Ω też, wtedy i tylko wtedy, gdy $g > 0$.

2.3.2 Kwiatek

Do „standardowych warunków” dorzucimy jeszcze punkt startu w początku układu, czyli $x_0 = 0$. Dostajemy tym samym takie równania ruchu:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\dot{y}_0}{\omega - \Omega} (\cos(\omega t) - \cos(\Omega t)) \\ y(t) &= \frac{\dot{y}_0}{\omega - \Omega} (\sin(\omega t) - \sin(\Omega t)) . \end{aligned}$$

Zastosujmy znane tożsamości trygonometryczne, oraz oznaczmy

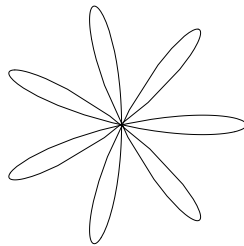
$$\begin{aligned} \psi &= \frac{\omega + \Omega}{2} \\ \Gamma &:= \frac{\omega - \Omega}{2} = \sqrt{g + \psi^2} , \end{aligned}$$

by otrzymać dość przyjemne w dotyku rozwiązanie

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{\dot{y}_0}{\Gamma} \sin(\psi t) \sin(\Gamma t) \\ y(t) &= \frac{\dot{y}_0}{\Gamma} \sin(\psi t) \cos(\Gamma t) . \end{aligned}$$

Znów otrzymaliśmy coś, czego tor całkiem ładnie da się wyrazić w zależności od kąta, jak zwykle mierzonego od pionu:

$$r(\theta) = \frac{\dot{y}_0}{\psi} \sin\left(\frac{\psi}{\Gamma}\theta\right) .$$



Rysunek 2: Jaki jest kwiatek, każdy widzi.

2.3.3 Zębatki na zewnątrz i do środka

Tym razem zastanówmy się (a raczej: policzmy) przypadek, w którym na początku ładunek spoczywa — czyli $\dot{y}_0 = 0$. Tym razem nasze współczynniki wyglądają następująco:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\Omega}{\omega - \Omega} x_0 \\ B &= \frac{\omega}{\omega - \Omega} x_0 = \left(1 - \frac{\Omega}{\omega - \Omega}\right) x_0 . \end{aligned}$$

Znów zabawa trygonometrią na poziomie gimnazjalisty, po czym dostajemy

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \left(\cos(\Omega t) - \frac{\Omega}{\psi} \cos(\psi t) \cos(\Gamma t) \right) \\ y(t) &= x_0 \left(\sin(\Omega t) - \frac{\Omega}{\psi} \cos(\psi t) \sin(\Gamma t) \right) . \end{aligned}$$

Przyjemnie jest jeszcze wyznaczyć funkcję odległości od czasu, która to wygląda następująco

$$r^2(t) = x^2(t) + y^2(t) = x_0^2 \left(1 + \frac{\Omega^2}{\psi^2} \cos^2(\psi t) - 2 \frac{\Omega}{\psi} (\cos(\Omega t) \cos(\Gamma t) + \sin(\Omega t) \sin(\Gamma t)) \right) .$$

Zaraz, ale to wyrażenie trygonometryczne „z końca” jest niczym innym, tylko $\cos(\psi t)$! Czas wyklarować odpowiedni współczynnik

$$\frac{\Omega^2}{\psi^2} - 2 \frac{\Omega}{\psi} = \frac{\Omega(\Omega - 2\psi)}{\psi^2} = \frac{(\psi - \Gamma)(-\psi - \Gamma)}{\psi^2} = \frac{\Gamma^2 - \psi^2}{\psi^2} = \frac{(g + \psi^2) - \psi^2}{\psi^2} = \frac{g}{\psi^2} .$$

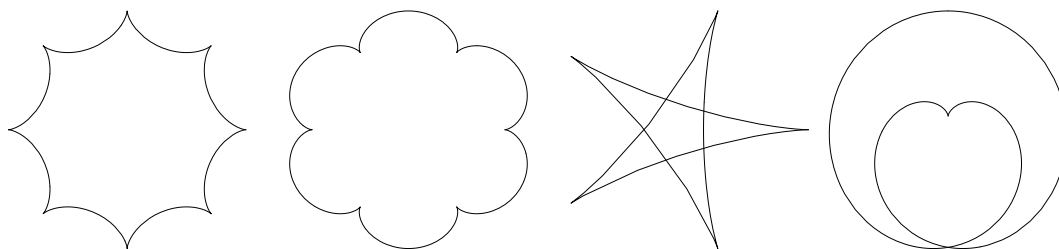
Suma sumarum, dostajemy

$$r^2(t) = x_0^2 \left(1 + \frac{g}{\psi^2} \cos^2(\psi t) \right) .$$

Dlaczego koło zębate?

O ile funkcja odległości od czasu jest dość gładka, tor taki już nie jest. W prawdzie ze strony o niższym potencjale ładunek grzecznie zakręca, jednak powracając na wysokość startową traci całą swoją energię kinetyczną. Tym samym ruch koła tych punktów „niskoenergetycznych” przebiega praktycznie wzdłuż promienia, rysując takie ostre jak igły „zęby”. Stąd może nasunąć się skojarzenie z piłą tarczową lub, właśnie, kołem zębatym.

Oczywiście sprawa wygląda różnie dwóch przypadkach — pola przyciągającego ($g > 0$) i pola odpychającego ($g < 0$). Zęby pojawiają się z tej strony, z której energia potencjalna jest większa. Tym samym — gdy siła jest przyciągająca, zęby są na zewnątrz figury, gdy odpychająca — wewnątrz.



Rysunek 3: Zębaki przeróżne: tradycyjna, ciastkowa, nocna i romantyczna.

2.3.4 Wianek

Przejdźmy teraz do przypadku nieco wybrednego, tzn. nie będącego żanym z pozostałych. W szczególności nie chcemy żadnych kół, torów przechodzących przez środek ani punktów, w których ładunek się zatrzymuje. Należy jednak zaznaczyć, że wklepując losowe parametry (przy zachowaniu $g + \psi^2 > 0$), nie możemy być zbyt pewni otrzymania wianka jako „ogólnego” rozwiązania. W istocie — koło i kwiatek są dość szczególnymi przypadkami, ale piła taka już nie jest.

Jak zatem dobrać warunek gwarantujący bycie wiankiem? Otóż potrzeba i wystarczy, by ładunek spełniał następujące zdania (jest to nic innego jak wykluczenie poprzednio rozważanych przypadków):

- W punkcie największej energii potencjalnej miał prędkość transwersalną.
- Nie był okręgiem.
- Nie przechodził przez środek.

Zacznijmy od pierwszych dwóch warunków. Gdy $g > 0$, by punkt startowy był punktem największego oddalenia, całkowita siła musi być większa od siły dośrodkowej (inaczej ładunek by się oddalił, albo po prostu nie przybliżył). Zatem zachodzi

$$\frac{\dot{y}_0^2}{x_0} < g x_0 + 2 \psi y_0 . \quad (15)$$

Do tej nierówności zabieramy się, badając dwumian kwadratowy zmiennej \dot{y}_0 . Wpierw przekształcamy do postaci

$$\frac{\dot{y}_0^2}{x_0} - 2 \psi y_0 - g x_0 < 0 ,$$

po czym wyznaczamy graniczne \dot{y}_0 , z równania w którym znak „<” zamieniamy na równość (standardowa metoda licealna).

Dostajemy w efekcie

$$\dot{y}_{0gr} = x_0 \frac{2 \psi \pm \sqrt{4 \psi^2 + 4 g}}{2} = x_0 \left(\psi \pm \sqrt{g + \psi^2} \right) = x_0 (\psi \pm \Gamma) .$$

Zatem gdy $g > 0$, $x_0 \Omega < \dot{y}_0 < x_0 \omega$. Istotne jest, że $\Omega < \omega$, przez co zawsze takie \dot{y}_0 istnieje.

Gdy zaś $g < 0$, nierówność (15) zmienia znak (tzn. „<” przechodzi na „>”), jednak pierwiastki równania kwadratowego pozostają te same. Zatem w tym wypadku mamy $\dot{y}_0 < x_0 \Omega$ lub $x_0 \omega < \dot{y}_0$.

Pozostaje jeszcze wykluczyć możliwość przechodzenia przez środek. Chyba najprościej zrobić to ze zmodyfikowanego momentu pędu. Gdy ładunek przechodzi przez środek, $\mathcal{M} = 0$. Czyli w szczególności

$$0 = -\frac{qB}{2m} x_0^2 + \dot{y}_0 x_0 = -\psi x_0^2 + \dot{y}_0 x_0 .$$

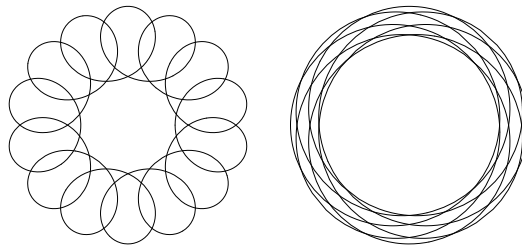
Dodatkowo, nie chcemy by na „dzień dobry” ładunek był w środku, czyli $x_0 \neq 0$. Daje to

$$\dot{y}_0 = \psi x_0 .$$

My jednak nie chcemy, by ładunek przechodził przez zero, więc nakładamy ograniczenie

$$\dot{y}_0 \neq \psi x_0 .$$

Skoro $\Omega < \psi < \omega$, w istocie problem dotyczy tylko pola przyciągającego.



Rysunek 4: Wianek ze sprężynki i z torusa.

Pytanie 5 Dla jakich warunków początkowych we wianku tor ma odcinki proste (czyli o nieskończonym promieniu krzywizny) przy najmniejszej odległości?

Pytanie 6 W niektórych wiankach tor ma wygląd sprężyny, tzn. w obrębie jednego okrążenia wogół środka tor ładunku przecina się. Jakie są warunki wystarczające i koniecznie, by tak było?

2.4 Okresowość

O nietrywialnej okresowości (tzn. pomijamy okręgi oraz ładunki stojące) jest sens mówić tylko w przypadku $g + \psi^2 > 0$, czyli tym najpiękniejszym. Co jest istotne, zależy ona od parametrów pola (g i ψ), a nie warunków początkowych (pomijając pewne trywialne patologie). Nie jest jednak to rzecz osobliwa ani dziwna — w ruchu harmonicznym tak zwykle bywa, a my mamy do czynienia z czymś „prawie-harmonicznym”. Nie czujmy się zatem zaskoczeni. Do rzeczy, weźmy się za zbadanie kiedy ona zachodzi.

By ruch był okresowy, występujące w nim częstości muszą być współmierne, tzn.

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{n}{m},$$

dla pewnych n i m całkowitych. By dostać wynik, wystarczy torchę rozpisnąć i pomęczyć to wyrażenie

$$\begin{aligned}\frac{\psi - \sqrt{g + \psi^2}}{\psi + \sqrt{g + \psi^2}} &= \frac{n}{m} \\ m(\psi - \sqrt{g + \psi^2}) &= n(\psi + \sqrt{g + \psi^2}) \\ (m - n)\psi &= (m + n)\sqrt{g + \psi^2} \\ ((m - n)^2 - (m + n)^2)\psi^2 &= (m + n)^2 g,\end{aligned}$$

co daje

$$g = -\frac{4mn}{(m+n)^2}\psi^2.$$

Ciąg dalszy być może nastąpi.

Literatura

- [1] Eric W. Weisstein, *First-Order Ordinary Differential Equation*, MathWorld — A Wolfram Web Resource <http://mathworld.wolfram.com/First-OrderOrdinaryDifferentialEquation.html>